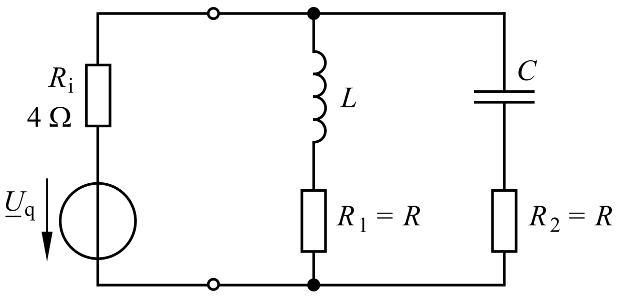
Nerreter, Grundlagen der Elektrotechnik
Carl Hanser Verlag München

6 Netze an Sinusspannung

Aufgabe 6.19
Ein Verstärker-Zweitor wird durch die Leitwert-Parameter $Y_{11} = 490\ \mu\text{S}$; $Y_{12} = -0{,}05\ \mu\text{S}$; $Y_{21} = 0{,}06\ \text{S}$; $Y_{22} = 250\ \mu\text{S}$ beschrieben. Die Quelle hat den Innenwiderstand $R_\text{i} = 600\ \Omega$. Wie muss der Lastwiderstand R_L für Anpassung am Ausgang gewählt werden? Liegt dabei auch am Tor 1 Anpassung vor?
Wie müssen R_i und R_L gewählt werden, damit an beiden Toren Anpassung vorliegt?

Aufgabe 6.20
Die Lautsprecherbox besteht aus einem Tiefton-, einem Hochtonlautsprecher und einer Frequenzweiche mit den Grundeintoren L und C. Jeder Lautsprecher hat den Widerstand $R = R_1 = R_2$.

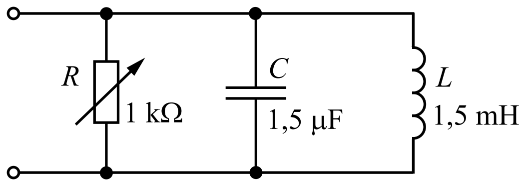


1) Berechnen Sie den Leitwert $\underline{Y}_\text{L}$ und den Widerstand $\underline{Z}_\text{L}$ der Lautsprecherbox.

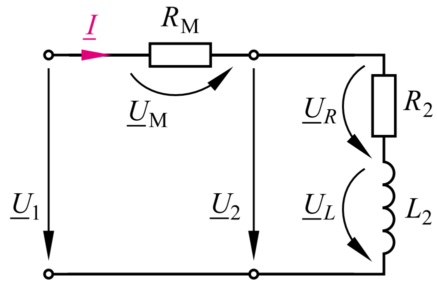
2) Welche Bedingung muss der Widerstand R erfüllen, damit Z_L für sämtliche Frequenzen ein Wirkwiderstand ist? Dimensionieren Sie diesen Widerstand R so, dass bei sämtlichen Frequenzen Anpassung vorliegt.

3) Bei der Übernahmefrequenz ist die Wirkleistung in R_1 gleich der Wirkleistung in R_2. Berechnen Sie die Grundeintore L und C für die Übernahmefrequenz 320 Hz.

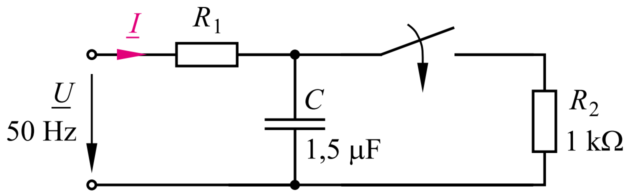
Aufgabe 6.21
Stellen Sie für die Frequenz 2 kHz und den veränderlichen Widerstand $0 \le R \le R_\text{max}$ die Widerstandsfunktion der Parallelschaltung durch eine Ortskurve dar.



Aufgabe 6.22
Eine Spule, die als Reihenschaltung von zwei Grundeintoren R_2 und L_2 angesehen werden kann, wird in Reihenschaltung mit dem Widerstand $R_\text{M} = 22\ \Omega$ an der Sinusspannung U_1 bei der Frequenz 50 Hz betrieben. Mit einem Voltmeter werden die Effektivwerte $U_1 = 12$ V; $U_\text{M} = 6{,}2$ V und $U_2 = 7{,}4$ V gemessen. Berechnen Sie die Grundeintore R_2 und L_2.
Da drei Spannungen gemessen werden, spricht man auch vom Dreispannungsmesser-Verfahren.

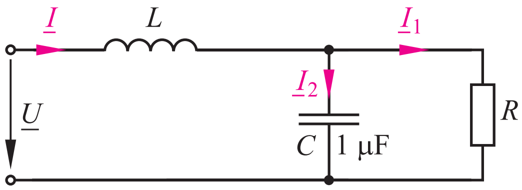


Aufgabe 6.23
In der Schaltung, die an der Sinusspannung $\underline{U}$ liegt, soll der Strom $\underline{I}$ sowohl bei geöffnetem als auch bei geschlossenem Schalter denselben Effektivwert haben. Wie muss der Widerstand R_1 bemessen sein?



Aufgabe 6.24

Mit der BOUCHEROT-Schaltung (Paul Boucherot, 1869 – 1943) kann man durch geeignete Dimensionierung von L und C erreichen, dass der Effektivwert I_1 des Stromes $\underline{I}_1$ vom Widerstand R unabhängig ist.



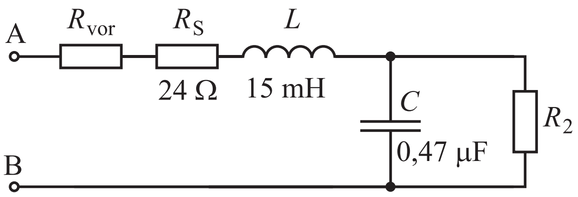
Unter welcher Bedingung ist der Effektivwert I_1 konstant? Dimensionieren Sie L für die Frequenz 400 Hz.

Aufgabe 6.25

Eine Glühlampe 125 V; 15 W soll in Reihe mit einem Kondensator, der näherungsweise als Grundeintor C angesehen werden kann, an der Spannung 230 V bei 50 Hz im Nennbetrieb arbeiten. Welche Kapazität und welche Bemessungsspannung muss der Kondensator haben?

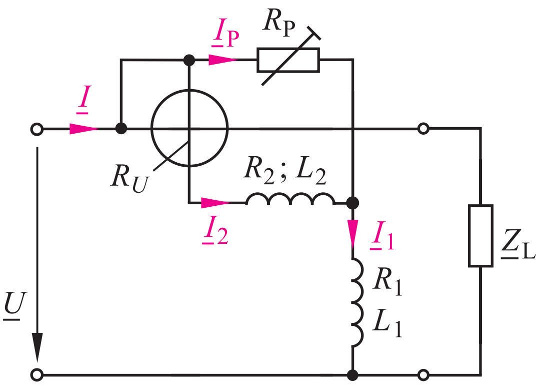
Aufgabe 6.26

Eine Spule, die als Reihenschaltung von zwei Grundeintoren R_S und L angesehen werden kann, ist mit einem Grundeintor C und den Widerständen R_{vor} und R_2 beschaltet. Dimensionieren Sie R_{vor} und R_2 so, dass das Eintor zwischen den Klemmen A und B bei der Frequenz 1 kHz den reellen Widerstand 1,5 kΩ aufweist.



Aufgabe 6.27

Mit dem elektrodynamischen Messwerk kann Blindleistung im Einphasennetz gemessen werden, wenn der Strom $\underline{I}_2$, der durch die Spannungsspule mit dem Widerstand R_U fließt, der Spannung $\underline{U}$ um 90° nacheilt. Diese Phasenverschiebung kann z. B. mit der HUMMEL-Schaltung erreicht werden.



Georg Hummel, geb. 1856 in Moosburg in Bayern, gründete 1893 eine Zählerfabrik in München und erhielt 1895 ein Patent auf die Schaltung, die später nach ihm benannt wurde; er starb 1902 in München.

Welchen Wert muss der Widerstand R_P erhalten, damit der Strom $\underline{I}_2$ der Spannung $\underline{U}$ um 90° nacheilt?
R_U = 1 kΩ; R_1 = 180 Ω; R_2 = 100 Ω;
L_1 = 3,2 H; L_2 = 1,6 H; f = 50 Hz.
Die in der Schaltung mit R; L bezeichneten Spulen sind jeweils als Reihenschaltung von zwei Grundeintoren R und L aufzufassen.

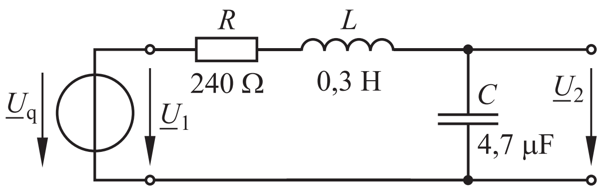
Aufgabe 6.28

Eine Spule, die als Reihenschaltung von zwei Grundeintoren R und L angesehen werden kann, wird mit einem Grundeintor C als Tiefpass betrieben.

1) Welche Spannung U_{20} liegt bei sehr niedrigen Frequenzen $f \to 0$ am Ausgang? U_q = 5 V

2) Bei welcher Frequenz f_{max} hat der Effektivwert U_2 der Ausgangsspannung ein Maximum?

3) Berechnen Sie diejenige Frequenz, bei der die Ausgangsspannung das $1/\sqrt{2}$-fache von U_{20} beträgt.



Lösung 6.19

Für $G_i = 1/R_i = 1{,}667$ mS berechnen wir zunächst mit der in Tab. 6.4 angegebenen Gleichung den Ersatzleitwert des am Tor 1 mit R_i beschalteten Zweitors:

$$\underline{Y}_{e2} = \underline{Y}_{22} - \frac{\underline{Y}_{12}\,\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11} + G_i} = 251{,}39\ \mu\text{S}$$

Für Anpassung am Ausgang muss der Lastwiderstand $R_L = Z_{e2} = 1/Y_{e2} = 3{,}978$ kΩ gewählt werden.
Der Ersatzwiderstand am Tor 1 ist:

$$\underline{Y}_{e1} = \underline{Y}_{11} - \frac{\underline{Y}_{12}\,\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{22} + G_L} = 496\ \mu\text{S}$$

Der Ersatzwiderstand $Z_{e1} = 1/Y_{e1} = 167$ kΩ am Tor 1 ist wesentlich größer als der Innenwiderstand der Quelle; am Tor 1 liegt keine Anpassung vor.
Für Anpassung an beiden Toren benötigen wir die Wellenwiderstände, die wir mit den Gleichungen aus der Tab. 6.6 berechnen:

$$\underline{Z}_{w1} = \sqrt{\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{11}\cdot \det \underline{Y}}} = 2{,}016\ \text{k}\Omega$$

$$\underline{Z}_{w2} = \sqrt{\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{22}\cdot \det \underline{Y}}} = 3{,}952\ \text{k}\Omega$$

Für $R_i = 2{,}016$ kΩ und $R_L = 3{,}952$ kΩ liegt Anpassung an beiden Toren vor.

Lösung 6.20

1) Der komplexe Leitwert der Lautsprecherbox ist:

$$\underline{Y}_L = \frac{1}{R + \mathrm{j}\,\omega L} + \frac{1}{R - \mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}} = \frac{2R + \mathrm{j}\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}{\left(R + \mathrm{j}\,\omega L\right)\cdot\left(R - \mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}\right)}$$

Wir multiplizieren im Nenner aus:

$$\underline{Y}_L = \frac{2R + \mathrm{j}\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \dfrac{L}{C} + \mathrm{j}\left(\omega L R - \dfrac{R}{\omega C}\right)}$$

Der komplexe Widerstand ist der Kehrwert des komplexen Leitwerts:

$$\underline{Z}_L = R\cdot\frac{R + \dfrac{L}{CR} + \mathrm{j}\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}{2R + \mathrm{j}\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}$$

2) Der Imaginärteil des Zählers stimmt mit dem Imaginärteil des Nenners überein. Für den Sonderfall

$$R = \frac{L}{CR}$$

stimmt auch der Realteil des Zählers mit dem Realteil des Nenners überein. Wenn also die Bedingung

$$R^2 = \frac{L}{C}$$

erfüllt ist, dann ist $Z_L = R$ für sämtliche Frequenzen ein Wirkwiderstand.

Für Anpassung muss $R = R_i = 4\ \Omega$ gewählt werden.

3) Bei der Übernahmefrequenz müssen die komplexen Widerstände

$$\underline{Z}_1 = R + \mathrm{j}\,\omega L \quad \text{und} \quad \underline{Z}_2 = R - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C}$$

gleiche Beträge haben. Die Quadrate dieser Beträge sind:

$$R^2 + (\omega L)^2 = R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2$$

Damit gilt für die Übernahme-Kreisfrequenz $\omega_ü$:

$$\omega_ü^2 = \frac{1}{LC}$$

Mit dieser Gleichung und der Bedingung $R^2 = L/C$ berechnen wir die gesuchten Größen:

$$L = \frac{R}{\omega_ü} = 1{,}99\ \text{mH}$$

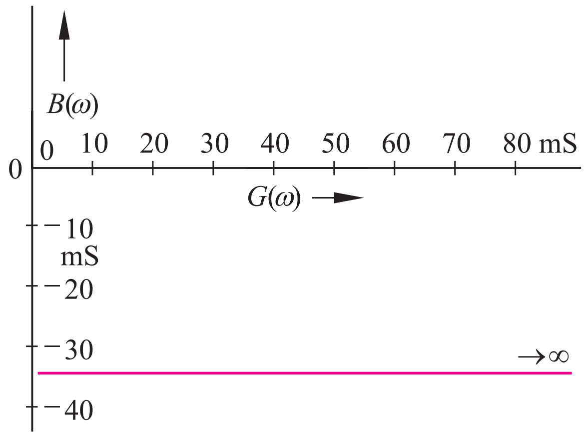
$$C = \frac{1}{\omega_ü R} = 124{,}3\ \mu\text{F}$$

Lösung 6.21

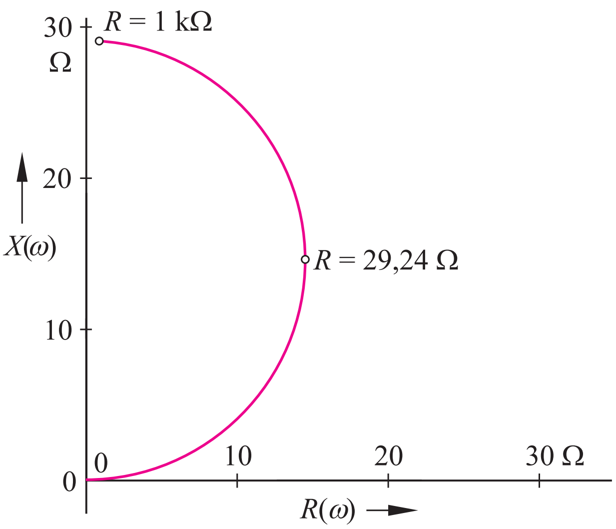
Zunächst zeichnen wir die Ortskurve für den komplexen Leitwert:

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}\,\omega C - \mathrm{j}\frac{1}{\omega L} = \frac{1}{R} - \mathrm{j}\ 34{,}2\ \mathrm{mS}$$

Die Ortskurve mit dem konstanten Imaginärteil beginnt beim reellen Leitwert $G_{\mathrm{min}} = 1/R_{\mathrm{max}} = 1$ mS und endet beim Leitwert $G_{\mathrm{max}} \to \infty$.

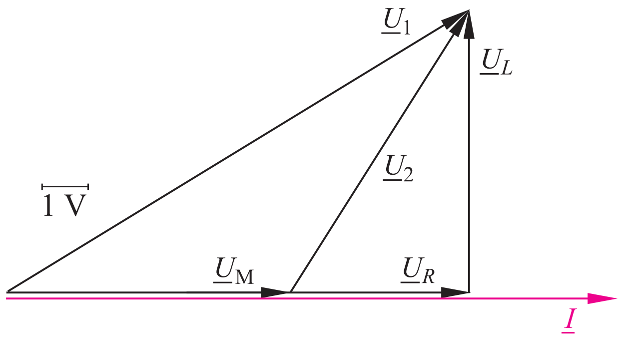


Die Ortskurve für den komplexen Widerstand erhalten wir durch Inversion der Leitwert-Ortskurve. Dabei wird der Kehrwert von jedem Punkt der Leitwert-Ortskurve berechnet und aufgetragen.



Lösung 6.22

Um einen Überblick zu erhalten, zeichnen wir zunächst ein maßstäbliches Zeigerdiagramm der Sinusgrößen.



Für die Effektivwerte gilt:

$U_{\mathrm{M}} = R_{\mathrm{M}}\, I;\;\; U_R = R_2\, I;\;\; U_L = \omega L_2\, I$

Mit dem Hypotenusensatz des PYTHAGORAS setzen wir für die Effektivwerte der Spannungen und Ströme des äußeren Dreiecks an:

$$(R_{\mathrm{M}} + R_2)^2\, I^2 + (\omega L_2)^2\, I^2 = U_1^2$$

$$U_{\mathrm{M}}^2 + 2\, R_{\mathrm{M}}\, R_2\, I^2 + R_2^2\, I^2 + (\omega L_2)^2\, I^2 = U_1^2$$

Für das innere Dreieck gilt entsprechend:

$$R_2^2\, I^2 + (\omega L_2)^2\, I^2 = U_2^2$$

Wir bilden die Differenz der Gleichungen:

$$U_{\mathrm{M}}^2 + 2\, R_{\mathrm{M}}\, R_2\, I^2 = U_1^2 - U_2^2$$

Damit berechnen wir den gesuchten Widerstand:

$$R_2 = R_{\mathrm{M}} \cdot \frac{U_1^2 - U_2^2 - U_{\mathrm{M}}^2}{2\, U_{\mathrm{M}}^2} = 14{,}54\ \Omega$$

Mit $U_2/I = R_{\mathrm{M}}\, U_2/U_{\mathrm{M}}$ ergibt sich schließlich:

$$L_2 = \frac{1}{\omega} \cdot \sqrt{\left(\frac{U_2\, R_{\mathrm{M}}}{U_{\mathrm{M}}}\right)^2 - R_2^2} = 69{,}6\ \mathrm{mH}$$

Lösung 6.23
Bei geöffnetem Schalter fließt der Strom durch die Reihenschaltung aus R_1 und C mit dem komplexen Widerstand:

$$\underline{Z}_{\text{auf}} = R_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = \frac{1 + \mathrm{j}\omega C R_1}{\mathrm{j}\omega C}$$

Dieser Widerstand hat den Betrag:

$$Z_{\text{auf}} = \frac{\sqrt{1 + (\omega C R_1)^2}}{\omega C}$$

Bei geschlossenem Schalter liegt der Leitwert

$$\underline{Y}_{\text{P}} = \frac{1}{R_2} + \mathrm{j}\omega C$$

der Parallelschaltung aus R_2 und C in Reihe zu R_1. Dabei hat die Schaltung den Widerstand:

$$\underline{Z}_{\text{zu}} = R_1 + \frac{1}{\underline{Y}_{\text{P}}}$$

Wir setzen ein und bringen den Ausdruck auf den Hauptnenner:

$$\underline{Z}_{\text{zu}} = R_1 + \frac{R_2}{1+\mathrm{j}\omega C R_2} = \frac{R_1 + R_2 + \mathrm{j}\omega C R_1 R_2}{1+\mathrm{j}\omega C R_2}$$

Dieser Widerstand hat den Betrag:

$$Z_{\text{zu}} = \frac{\sqrt{(R_1+R_2)^2 + (\omega C R_1 R_2)^2}}{\sqrt{1 + (\omega C R_2)^2}}$$

Der Effektivwert des Stromes bleibt unverändert, wenn die Beträge der komplexen Widerstände gleiche Werte haben:

$$Z_{\text{zu}} = Z_{\text{auf}}$$

Wir quadrieren und setzen ein:

$$\frac{(R_1+R_2)^2 + (\omega C R_1 R_2)^2}{1 + (\omega C R_2)^2} = \frac{1 + (\omega C R_1)^2}{(\omega C)^2}$$

Nach dem Ausmultiplizieren bleibt folgende Gleichung übrig:

$$2\, R_1\, R_2\, (\omega C)^2 = 1$$

Für den gesuchten Widerstand R_1 ergibt sich:

$$R_1 = \frac{1}{2 R_2 (\omega C)^2} = 2{,}25\ \text{k}\Omega$$

Lösung 6.24
Zunächst setzen wir die Knotengleichung

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

in die Maschengleichung ein und erhalten:

$$\underline{U} = \mathrm{j}\,\omega L\,(\underline{I}_1 + \underline{I}_2) + R\,\underline{I}_1$$

Dann eliminieren wir den Strom $\underline{I}_2$ dadurch, dass wir die Maschengleichung $R\,\underline{I}_1 = \underline{I}_2/(\mathrm{j}\,\omega\, C)$ nach $\underline{I}_2$ auflösen und einsetzen:

$$\underline{U} = R\,(1 - \omega^2 L\, C)\,\underline{I}_1 + \mathrm{j}\,\omega\, L\,\underline{I}_1$$

Unter der Bedingung $\omega^2 L\, C = 1$ ist der Effektivwert I_1 von R unabhängig und es gilt:

$$\underline{U} = \mathrm{j}\,\omega\, L\,\underline{I}_1$$

Für 400 Hz und $C = 1\ \mu\text{F}$ ist $L = 158{,}3$ mH erforderlich.

Lösung 6.25
Durch die Reihenschaltung fließt der Strom:

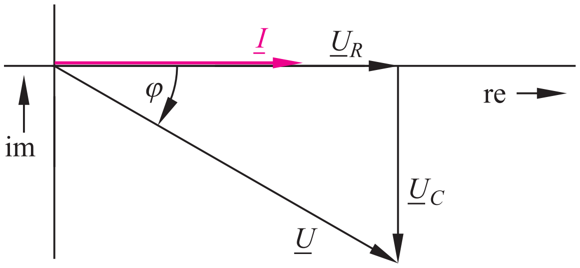
$$I = \frac{15\ \text{W}}{125\ \text{V}} = 0{,}12\ \text{A}$$

An der Glühlampe sind der Strom $\underline{I}$ und die Spannung $\underline{U}_R$ in Phase. Die Spannung $\underline{U}_C$ am Grundeintor C eilt dem Strom um 90° nach:

$$U_C = \sqrt{U^2 - U_R^2} = 193\ \text{V}$$

Mit der Gl. (6.32) berechnen wir die Kapazität des Grundeintors C mit den Effektivwerten der Spannung U_C und des Stromes:

$$C = \frac{I}{\omega U_C} = 2\ \mu\text{F}$$



Lösung 6.26

Wir fassen die Widerstände R_{vor} und R_S zu einem Widerstand

$$R_1 = R_{vor} + R_S$$

zusammen und erhalten dadurch die Schaltung im Beispiel 6.10. Der gesamte Widerstand ist bei der Resonanzfrequenz 1 kHz reell, bei der $X_e = 0$ ist:

$$X_e = \omega L - \frac{\omega C R_2^2}{1 + (\omega C R_2)^2} = 0$$

Damit berechnen wir den Widerstand R_2:

$$R_2 = \sqrt{\frac{1}{\frac{C}{L} - (\omega C)^2}} = 210{,}3\ \Omega$$

Schließlich setzen wir $R_e = 1{,}5$ kΩ in die Gleichung für den Wirkwiderstand des Beispiels 6.10 ein und berechnen:

$$R_1 = R_e - \frac{R_2}{1 + (\omega C R_2)^2} = 1{,}348\ \text{k}\Omega$$

Damit berechnen wir den gesuchten Widerstand:

$$R_{vor} = R_1 - R_S = 1{,}324\ \text{k}\Omega$$

Lösung 6.27

Zur Untersuchung der geforderten Phasenverschiebung benötigen wir eine Gleichung, in welcher die Spannung $\underline{U}$ als Funktion des Stromes $\underline{I}_2$ steht. Um diese Gleichung zu erhalten, setzen wir mit den komplexen Widerständen

$$\underline{Z}_1 = R_1 + \mathrm{j}\omega L_1; \ \underline{Z}_2 = R_U + R_2 + \mathrm{j}\omega L_2$$

die Maschengleichung an:

$$\underline{Z}_2\,\underline{I}_2 + \underline{Z}_1\,(\underline{I}_2 + \underline{I}_P) - \underline{U} = 0$$

Den Strom $\underline{I}_P$ eliminieren wir mit der Maschengleichung

$$\underline{Z}_2\,\underline{I}_2 - R_P\,\underline{I}_P = 0\,,$$

die wir mit $G_P = 1/R_P$ nach $\underline{I}_P$ auflösen:

$$\underline{I}_P = G_P\,\underline{Z}_2\,\underline{I}_2$$

Dies setzen wir in die erste Maschengleichung ein und erhalten die gesuchte Funktion:

$$\underline{U} = \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + G_P\,\underline{Z}_1\,\underline{Z}_2\right)\underline{I}_2$$

Der Strom $\underline{I}_2$ ist gegen die Spannung $\underline{U}$ um 90° phasenverschoben, wenn der eingeklammerte Ausdruck imaginär ist; der Realteil dieses Ausdrucks muss also gleich null sein:

$$\mathrm{Re}\left\{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + G_P\,\underline{Z}_1\,\underline{Z}_2\right\} = 0$$

Wir setzen die komplexen Widerstände $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ ein, multiplizieren aus und bilden den Realteil:

$$R_1 + R_U + R_2 + G_P\left[R_1(R_U + R_2) - \omega^2 L_1 L_2\right] = 0$$

Nun lösen wir nach G_P auf, bilden den Kehrwert und berechnen:

$$R_P = \frac{\omega^2 L_1 L_2 - R_1(R_U + R_2)}{R_1 + R_U + R_2} = 240\ \Omega$$