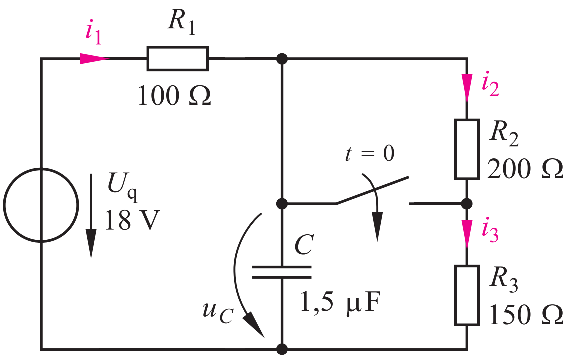
Nerreter, Grundlagen der Elektrotechnik
Carl Hanser Verlag München

8 Schaltvorgänge

Aufgabe 8.6
Wie lauten für R = 1 kΩ bei der Aufgabe 8.1 die Differenzialgleichungen und ihre Lösungen für die Spannungen u_1 und u_2 sowie für den Strom i?

Aufgabe 8.7
Ein Reihenschwingkreis nach Bild 8.9 mit R = 2 Ω; L = 2,5 mH und C = 1,0 µF wird zum Zeitpunkt t = 0 an eine Quelle mit der Gleichspannung U_q geschaltet. Welchen maximalen Wert erreicht die Spannung u_C nach dem Einschalten und zu welchem Zeitpunkt liegt er vor?

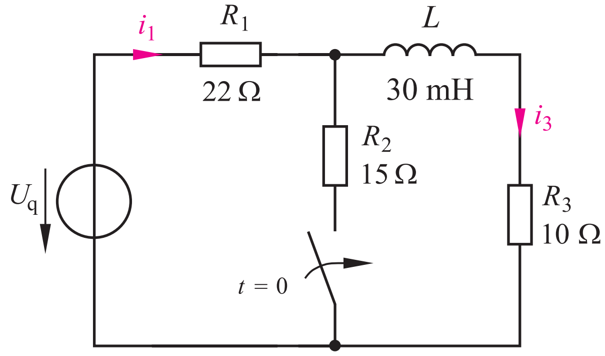
Aufgabe 8.8
Der ideale Schalter wird zum Zeitpunkt t = 0 geschlossen. Berechnen Sie die Spannung u_C und den Strom i_1; tragen Sie diese Größen jeweils für t<0 bis t = 4 τ auf. Welchen Betrag hat die Zeitkonstante τ?



Aufgabe 8.9
Ein leer laufendes Koaxialkabel, dessen Isolation aus Polyethylen (PE) besteht, wird beim Scheitelwert der Sinusspannung mit dem Effektivwert 10 kV abgeschaltet. Nach welcher Zeit ist die Spannung durch Entladung des Kabels über den Isolationswiderstand auf den ungefährlichen Wert 50 V gesunken?

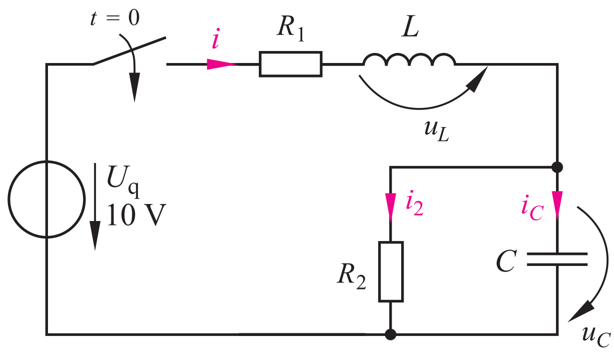
Aufgabe 8.10
Der im Beispiel 11.8 beschriebene Hochspannungs-Kondensator wird im entladenen Zustand zum Zeitpunkt t = 0 an eine Gleichspannungsquelle mit U_q = 20 kV und R_i = 1 kΩ geschaltet. Welche Augenblickswerte nehmen die Spannungen u_K bzw. u_P zu den Zeitpunkten t_1 = 1 s; t_2 = 10 s; t_3 = 100 s an?

Aufgabe 8.11
Das Netz liegt an der Gleichspannung U_q = 60 V. Der Schalter wird zum Zeitpunkt t = 0 geschlossen. Berechnen Sie den Zeitverläufe des Stromes i_1 und des Stromes i_3.



Aufgabe 8.12
Der ideale Schalter wird zum Zeitpunkt t = 0 geschlossen. Berechnen Sie den Dämpfungsgrad und geben Sie die Lösung der Differenzialgleichung für u_C und ihre Kenngrößen für folgende Werte an:

L = 2,5 mH; R_1 = 10 Ω; R_2 = 600 Ω; C = 1 µF



Lösung 8.6
Um die Eintorgleichungen

$$i = -C_1 \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}\,; \quad i = C_2 \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$$

in die Maschengleichung $u_1 = R\, i + u_2$ einsetzen zu können, differenzieren wir zunächst die Maschengleichung:

$$R \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = 0$$

Das Einsetzen der Eintorgleichungen ergibt:

$$R \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) i = 0$$

Der Klammerausdruck ist nach Gl. (3.31) der Kehrwert der Ersatzkapazität $C_\mathrm{e} = 0{,}6875\ \mu\mathrm{F}$. Wir multiplizieren die Differenzialgleichung mit C_e und erhalten mit der Zeitkonstanten $\tau = R\, C_\mathrm{e} = 687{,}5\ \mu\mathrm{s}$:

$$\tau \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i = 0$$

Der Anfangswert des Stromes ist $I_\mathrm{A} = U_\mathrm{A}/R = 0{,}36\ \mathrm{A}$ und der Endwert ist $I_\mathrm{E} = 0$. Entsprechend Gl. (8.4) lautet die Lösung für den Strom:

$$i = 0{,}36\ \mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

Mit der Eintorgleichung für C_2 erhalten wir die Differenzialgleichung für u_2:

$$i = 0{,}36\ \mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = C_2 \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$$

Der Lösungsansatz lautet:

$$u_2 = \frac{0{,}36\ \mathrm{A}}{C_2} \cdot \int \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\, \mathrm{d}t = -\tau \cdot \frac{0{,}36\ \mathrm{A}}{C_2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + K$$

Die Konstante K folgt aus der Randbedingung $u_2 = 0$ für $t = 0$. Damit berechnen wir:

$$K = \tau\, \frac{0{,}36\ \mathrm{A}}{C_2} = 247{,}5\ \mathrm{V}$$

Die Lösung für die Spannung u_2 lautet:

$$u_2 = 247{,}5\ \mathrm{V} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Die Differenzialgleichung für die Spannung u_1 lautet:

$$i = 0{,}36\ \mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = -C_1 \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}$$

Die Lösung für u_1 ermitteln wir dadurch, dass wir die Lösungen für u_2 und i in die Maschengleichung einsetzen und nach u_1 auflösen:

$$u_1 = 112{,}5\ \mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + 247{,}5\ \mathrm{V}$$

Lösung 8.7
Im Beispiel 8.6 ist bereits $\tau_2 = 50\ \mu\mathrm{s}$ ermittelt worden. Mit der Zeitkonstanten

$$\tau_1 = R\, C = 2\ \mu\mathrm{s}$$

berechnen wir den Dämpfungsgrad $\vartheta = 0{,}02$ und stellen fest, dass wegen $\vartheta < 1$ eine gedämpfte Schwingung vorliegt, bei der die Abklingkonstante nach Gl. (8.18) den Wert $\delta = 400\ \mathrm{s}^{-1}$ aufweist.
Zunächst bilden wir die erste Ableitung der Gl. (8.20):

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = U_\mathrm{E} \left[\left(\omega_\mathrm{n} + \frac{\delta^2}{\omega_\mathrm{n}}\right) \sin(\omega_\mathrm{n} t) \cdot \mathrm{e}^{-\delta t}\right]$$

Beim Maximum der Spannung u_C ist diese Ableitung gleich null. Dies bedeutet, dass

$$\sin(\omega_\mathrm{n} t) = 0$$

ist, was auf die Bedingung führt:

$$\omega_\mathrm{n} t = \pi$$

Mit der Gln. (6.58 und 8.19) berechnen wir:

$\omega_n = 19996\ \mathrm{s}^{-1}$

Damit berechnen wir den Zeitpunkt, zu dem das gesuchte Maximum vorliegt:

$$t = \frac{\pi}{\omega_n} = 157{,}11\ \mu\mathrm{s}$$

Für das Maximum gilt gemäß Gl. (8.20):

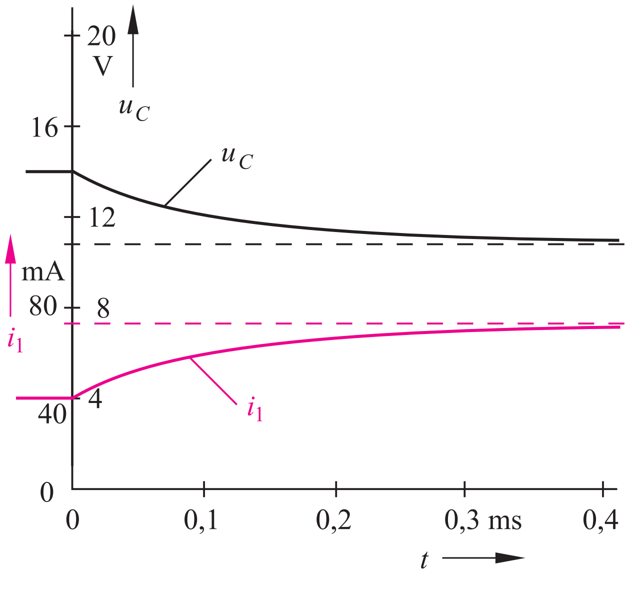
$$\frac{u_C}{U_E} = 1 - \cos \omega_n t \cdot \mathrm{e}^{-\delta t} = 1{,}939$$

Lösung 8.8
Vor dem Schließen des Schalters liegt das Eintor C an der Spannung $U_A = U_q\,(R_2+R_3)/(R_1+R_2+R_3) = 14\ \mathrm{V}$. Nach dem Schließen des Schalters stellt sich für $t \to \infty$ die Spannung $U_E = U_q\, R_3/(R_1 + R_3) = 10{,}8\ \mathrm{V}$ ein. Während des Übergangsvorganges liegen R_1 und R_3 parallel zu C und es ist:

$$\tau = R_P\, C = 60\ \Omega \cdot 1{,}5\ \mu\mathrm{F} = 90\ \mu\mathrm{s}$$

Für die Spannung u_C gilt gemäß Gl. (8.4):

$$u_C = 10{,}8\ \mathrm{V} + 3{,}2\ \mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$



Bei geöffnetem Schalter fließt der Strom $i_1 = 40$ mA. Wird der Schalter geschlossen, so steigt der Strom i_1 von diesem Wert auf den Endwert 72 mA an, der durch die Widerstände R_1 und R_3 bestimmt wird.

Lösung 8.9
Die Aufgabe scheint zunächst nicht lösbar zu sein, weil weder die Länge noch die Radien des Koaxialkabels gegeben sind. Diese Größen sind aber nicht erforderlich. Wir setzen die Gl. (3.37) und das Ergebnis des Beispiels 3.3 in die Gl. (8.3) ein und erhalten mit dem spezifischen Widerstand $\rho = 1/\gamma$ die Zeitkonstante:

$$\tau = R\, C = \varepsilon_r\, \varepsilon_0\, \rho$$

Der spezifische Widerstand von Polyethylen ist in der Tab. 1.2 angegeben und die Permittivitätszahl steht in der Tab. 3.1. Mit der Gl. (3.12) berechnen wir:

$$\tau = 203{,}64\ \mathrm{s}$$

Die Entladung beginnt bei $U_A = \sqrt{2} \cdot 10\ \mathrm{kV} = 14{,}14\ \mathrm{kV}$ und endet bei $U_E = 0$. Dies setzen wir mit dem Spannungswert, für den die Zeit t gesucht ist, in die Gl. (8.4) ein:

$$u_C = 50\ \mathrm{V} = U_A \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

Dies lösen wir nach der Zeit t auf und berechnen:

$$t = 1149{,}5\ \mathrm{s} = 19{,}16\ \mathrm{min}$$

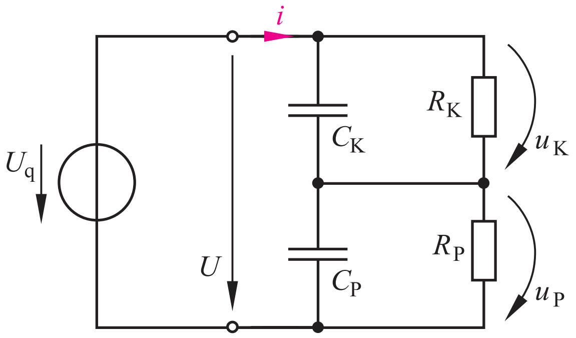
Lösung 8.10
Die Maschengleichung lautet:

$$u_K + u_P = U_q$$

Hiervon bilden wir die zeitliche Ableitung:

$$\frac{\mathrm{d}u_K}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_P}{\mathrm{d}t} = 0$$

Wir lösen nach u_K bzw. $\mathrm{d}u_K/\mathrm{d}t$ auf und setzen in die Knotengleichung



$$C_K \frac{du_K}{dt} + G_K u_K = C_P \frac{du_P}{dt} + G_P u_P = i$$

ein, wodurch wir eine Differenzialgleichung für u_P erhalten, die wir so umformen, dass u_P selbst ohne Koeffizienten steht:

$$\frac{C_K + C_P}{G_K + G_P} \cdot \frac{du_P}{dt} + u_P = \frac{G_K}{G_K + G_P} \cdot U_q = 198{,}02 \text{ V}$$

Die ungeladenen Eintore C_K und C_P werden von der Quelle in ungefähr 1 µs auf die Werte $U_{KA} = 13{,}3$ kV und $U_{PA} = 6{,}67$ kV aufgeladen; in dieser Zeitspanne spielen die hochohmigen Widerstände R_K und R_P praktisch keine Rolle.
Die Differenzialgleichung für u_P beschreibt diese Spannung sehr gut für Zeiten t > 10 µs. Wir können mit $U_A = 6{,}67$ kV und $U_E = 198{,}02$ V sowie

$$\tau = \frac{C_K + C_P}{G_K + G_P} = 8{,}91 \text{ s}$$

entsprechend Gl. (8.4) die Lösung der Differenzialgleichung für u_P angeben:

$$u_P = U_E + (U_A - U_E) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Für die vorgegebenen Zeiten berechnen wir:

$t_1 = 1$ s; $u_{P1} = 5{,}98$ kV; $u_{K1} = 14$ kV

$t_2 = 10$ s; $u_{P2} = 2{,}3$ kV; $u_{K2} = 17{,}7$ kV

$t_3 = 100$ s; $u_{P3} = 198{,}1$ V; $u_{K1} = 19{,}8$ kV

Lösung 8.11
Vor dem Schalten und für $t \to \infty$ liegt jeweils ein stationärer Zustand vor, bei dem am Eintor L keine Spannung abfällt; wir können dabei das Eintor L durch einen Kurzschluss ersetzen und berechnen damit den Anfangswert $I_A = 1{,}875$ A des Stromes i_L und den Endwert $I_E = 1{,}2857$ A.
Bei der Berechnung der Zeitkonstanten ersetzen wir die Quelle durch einen Kurzschluss. Die Parallelschaltung mit dem Widerstand $R_P = 8{,}919\ \Omega$ der Widerstände R_1 und R_2 liegt in Reihe mit dem Widerstand R_3. Damit berechnen wir die Zeitkonstante:

$$\tau = L/(R_P + R_3) = 1{,}5857 \text{ ms}$$

Mit der Gl. (8.10) setzen wir an:

$$i_3 = i_L = 1{,}2857 \text{ A} + 0{,}5893 \text{ A} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Nun berechnen wir mit der Gl. (5.30) die Spannung am Eintor L:

$$u_L = -11{,}149 \text{ V} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Schließlich berechnen wir mit der Maschengleichung

$$U_q = R_1\, i_1 + u_L + R_3\, i_3$$

den Strom i_1:

$$i_1 = 2{,}1428 \text{ A} + 0{,}2389 \text{ A} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Lösung 8.12
Wir setzen die Knotengleichung $i = i_2 + i_C$ und die Eintorgleichungen (5.3 und 5.30) in die Maschengleichung

$$R_1\, i + u_L + u_C = U_q$$

ein und erhalten eine Differenzialgleichung für u_C:

$$LC \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \left(R_1 C + \frac{L}{R_2}\right) \cdot \frac{du_C}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_2} u_C = U_q$$

Diese Gleichung formen wir so um, dass u_C mit dem Faktor 1 steht:

$$\frac{R_2 L C}{R_1+R_2} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R_1 R_2 C + L}{R_1+R_2} \cdot \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = \frac{R_2 U_\mathrm{q}}{R_1+R_2}$$

Durch einen Koeffizientenvergleich mit der Gl. (8.16) erhalten wir die Kenngrößen der Differenzialgleichung:

$$\tau_2 = \sqrt{\frac{R_2 L C}{R_1+R_2}} = 49{,}59\ \mu\mathrm{s}$$

$$\tau_1 = \frac{R_1 R_2 C + L}{R_1+R_2} = 13{,}93\ \mu\mathrm{s}$$

$$U_\mathrm{E} = \frac{R_2}{R_1+R_2} U_\mathrm{q} = 9{,}836\ \mathrm{V}$$

Mit der Gl. (8.17) berechnen wir den Dämpfungsgrad

$$\vartheta = \frac{\tau_1}{2\,\tau_2} = 0{,}14$$

und stellen fest, dass wegen $\vartheta < 1$ eine gedämpfte Schwingung entsteht mit der Abklingkonstanten:

$$\delta = \frac{\vartheta}{\tau_2} = 2{,}833 \cdot 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$$

Mit der Gl. (8.19) berechnen wir die zur Eigenfrequenz f_n gehörende Kreisfrequenz:

$$\omega_\mathrm{n} = \sqrt{\frac{1}{\tau_2^2} - \delta^2} = 19{,}966 \cdot 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$$

Die Gl. (8.20) gibt die Lösung der Differenzialgleichung an:

$$u_C = U_\mathrm{E}\left[1 - \left(\cos\omega_\mathrm{n} t + \frac{\delta}{\omega_\mathrm{n}} \sin\omega_\mathrm{n} t\right) \cdot \mathrm{e}^{-\delta t}\right]$$