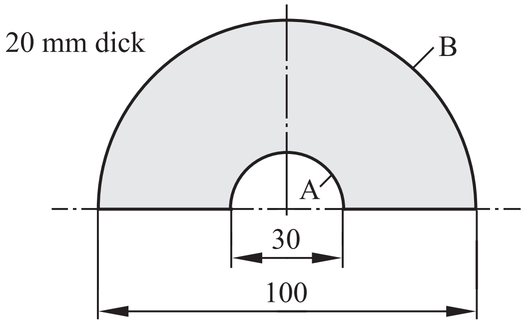
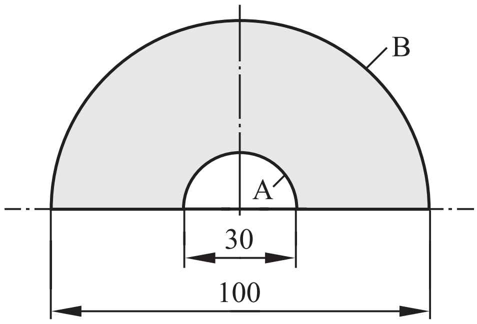
3 Zeitkonstante Felder

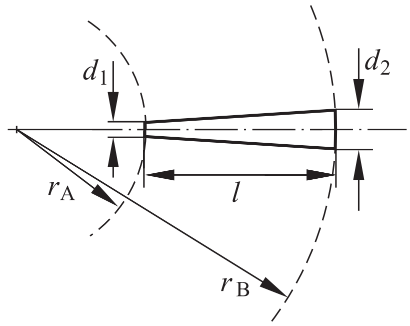
Aufgabe 3.12
Der Bügel hat die Leitfähigkeit 25 S/m. Berechnen Sie den Widerstand zwischen den Flächen A und B.



Aufgabe 3.13
Das Material zwischen den beiden Halbkugeln A und B hat die Leitfähigkeit 25 S/m. Berechnen Sie den Widerstand zwischen den Halbkugelflächen.

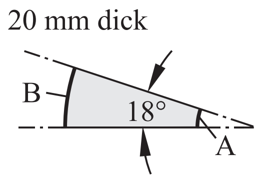


Aufgabe 3.14
Ein 10 cm langer Kegelstumpf aus Chromnickel Ni80Cr20 hat am einen Ende den Durchmesser d_1 = 4 mm und am anderen den Durchmesser $d_2 = 10$ mm. Die Äquipotenzialfläche beim Durchmesser d_1 ist ein Kugelsegment mit dem Radius $r_A = 66{,}7$ mm; die Äquipotenzialfläche beim Durchmesser d_2 ist ein Kugelsegment mit dem Radius $r_B = 166{,}74$ mm. Welchen Widerstand R hat der Kegelstumpf zwischen den beiden Äquipotenzialflächen?

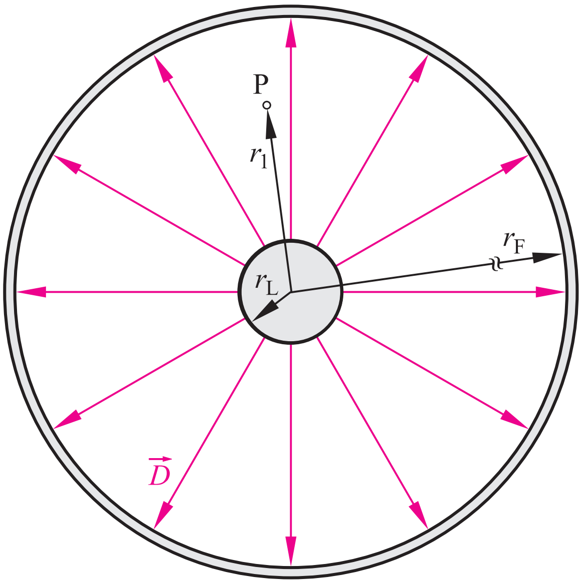


Bei dieser Aufgabe liegt es nahe, die Lösung dadurch zu vereinfachen, dass man den Widerstand eines Zylinders mit dem mittleren Durchmesser 7 mm berechnet (s. Aufgabe 1.11). Lassen Sie sich nicht auf diesen Irrweg locken, der zu einer falschen Lösung führt.

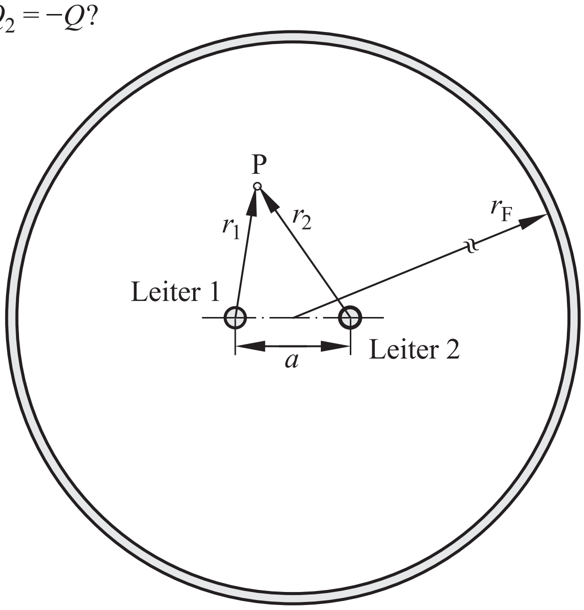
Aufgabe 3.15
Aus dem Bügel der Aufgabe 3.12 wird ein Teilstück ausgeschnitten. Berechnen Sie den Widerstand zwischen den Flächen A und B.



Aufgabe 3.16
Eine Doppelleitung besteht aus zwei zylindrischen Leitern mit dem Durchmesser d_L, deren Achsen den Abstand a aufweisen. Beide Leiter befinden sich innerhalb eines Fernzylinders mit dem Radius $r_F \gg a$, dem das Potenzial $\varphi_F = 0$ zugeordnet wird.
Im Gegensatz zum Radius der Fernkugel (s. Abschn. 3.2.4) hat der Radius r_F des Fernzylinders einen endlichen Wert.
1) Zunächst trage lediglich der Leiter 1, den wir koaxial zum Fernzylinder angeordnet annehmen, die Ladung Q_1. Welches Potenzial φ_1 hat der Punkt P im Abstand r_1 von der Achse?



2) Im Folgenden trage lediglich der Leiter 2, den wir koaxial zum Fernzylinder angeordnet annehmen, die Ladung Q_2. Welches Potenzial φ_2 hat der Punkt P im Abstand r_2 von der Achse?
3) Die beiden Leiter 1 und 2 werden jeweils um die Strecke $a/2 \ll r_F$ versetzt. Das Potenzial φ_P ist dabei die Summe der in 1) und 2) berechneten Potenziale. Welches Potenzial hat der Punkt P für $Q_1 = +Q$ und $Q_2 = -Q$?



4) Welches Potenzial φ_{L1} hat der Punkt P für $Q_1 = +Q$ und $Q_2 = -Q$, wenn er auf der Oberfläche des Leiters 1 liegt, wo $r_1 = r_L$ und $r_2 \approx a$ ist?

5) Welches Potenzial φ_{L2} hat der Punkt P für $Q_1 = +Q$ und $Q_2 = -Q$, wenn er auf der Oberfläche des Leiters 2 liegt, wo $r_1 \approx a$ und $r_2 = r_L$ ist?

6) Berechnen Sie mit der Spannung $U = \varphi_{L1} - \varphi_{L2}$ die Kapazität der Doppelleitung in Luft für die Permeabilitätszahl $\varepsilon_r = 1$.

Lösung 3.12
Wir denken uns den Körper in viele dünne Halbzylinder mit der Dicke dr zerlegt. Jeder Halbzylinder der Höhe h = 20 mm hat den Widerstand:

$$\mathrm{d}R = \frac{\mathrm{d}r}{\gamma A} = \frac{\mathrm{d}r}{\gamma\,\pi\,h\,r}$$

Die Halbzylinder zwischen den Elektroden A und B liegen in Reihe. Der Widerstand der Anordnung mit den Radien r_A = 15 mm und r_B = 50 mm ist:

$$R = \int_{r_A}^{r_B} \mathrm{d}R = \frac{\ln \frac{r_B}{r_A}}{\gamma\,\pi\,h} = 0{,}766\ \Omega$$

Lösung 3.13
Wir denken uns den Körper in viele dünne Kugelschichten mit der Dicke dr zerlegt. Jede dieser Kugelschichten hat die Querschnittsfläche $A = 2\,\pi\,r^2$. Damit hat jede Kugelschicht den Widerstand:

$$\mathrm{d}R = \frac{\mathrm{d}r}{\gamma A} = \frac{\mathrm{d}r}{2\pi\,\gamma\,r^2}$$

Die Kugelschichten zwischen den Elektroden A und B liegen in Reihe. Der Widerstand der Anordnung mit den Radien r_A = 15 mm und r_B = 50 mm ist:

$$R = \int_{r_A}^{r_B} \mathrm{d}R = \frac{1}{2\pi\,\gamma}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = 0{,}297\ \Omega$$

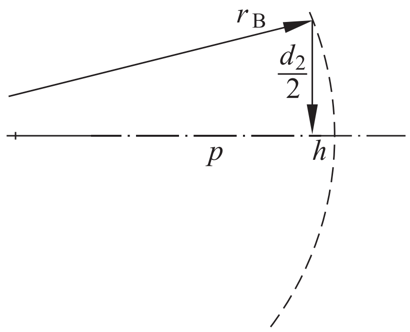
Lösung 3.14

Wie in der Aufgabe 3.13 berechnen wir zunächst den Widerstand zwischen den beiden Halbkugeln mit den Radien r_A und r_B und setzen dabei für die Leitfähigkeit den Wert $\gamma = 0{,}91\ \mathrm{S\,m/mm^2}$ (Tab. 1.3) ein:

$$R_{\text{Halbkugel}} = \int_{r_A}^{r_B} \mathrm{d}R = \frac{1}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = 1{,}5732\ \mu\Omega$$

Die Äquipotenzialfläche des Kegelstumpfes ist eine Kugelkappe, die eine wesentlich kleinere Fläche als die Halbkugel hat. Beim Radius r_B gilt:

$$A_{\text{Kugelkappe}} = 2\,\pi\,r_B\,h$$



Die Höhe h der Kugelkappe beim Radius r_B berechnen wir mit $r_B = p + h$ und $p^2 + (d_2/2)^2 = r_B^2$:

$$h = r_B - \sqrt{r_B^2 - \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = 0{,}075\ \mathrm{mm}$$

Das Verhältnis der Flächen von Halbkugel und Kugelkappe hat bei jedem Radius $r_A \le r \le r_B$ denselben Wert; wir berechnen es für den Radius $r = r_B$:

$$\frac{A_{\text{Halbkugel}}}{A_{\text{Kugelkappe}}} = \frac{2\pi r_B^2}{2\pi r_B h} = 2223{,}2$$

Damit berechnen wir den gesuchten Widerstand:

$$R_{\text{Kugelkappe}} = R_{\text{Halbkugel}} \cdot \frac{A_{\text{Halbkugel}}}{A_{\text{Kugelkappe}}} = 3{,}5\ \mathrm{m\Omega}$$

Lösung 3.15

Die Anordnung hat 10 % der Fläche des Halbzylinders in der Aufgabe 3.12. und damit beträgt der Leitwert G_{Aus} des Ausschnitts nur 10 % des in der Lösung 3.12 berechneten Leitwerts $G = 1/R = 1/(0{,}766\ \Omega)$. Damit gilt:

$$R_{\text{Aus}} = 10\,R = 7{,}66\ \Omega$$

Lösung 3.16

1) Entsprechend Gl. (3.36) berechnen wir das Potenzial des Punktes P:

$$\varphi_1 = U_{1F} = \int_{r_1}^{r_F} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{Q}{\varepsilon_r\,\varepsilon_0 \cdot 2\,\pi\,l} \cdot \ln\frac{r_F}{r_1}$$

2) Durch Verändern der Indizes ergibt sich:

$$\varphi_2 = U_{2F} = \int_{r_2}^{r_F} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{Q}{\varepsilon_r\,\varepsilon_0 \cdot 2\,\pi\,l} \cdot \ln\frac{r_F}{r_2}$$

3) Der Punkt P liegt auf dem Potenzial:

$$\varphi_P = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{Q}{\varepsilon_r\,\varepsilon_0 \cdot 2\,\pi\,l} \cdot \ln\frac{r_2}{r_1}$$

4) Der Leiter 1 hat das Potenzial:

$$\varphi_{L1} = \frac{Q}{\varepsilon_r\,\varepsilon_0 \cdot 2\,\pi\,l} \cdot \ln\frac{a}{r_L}$$

5) Der Leiter 2 hat das Potenzial:

$$\varphi_{L2} = \frac{-Q}{\varepsilon_r\,\varepsilon_0 \cdot 2\,\pi\,l} \cdot \ln\frac{a}{r_L}$$

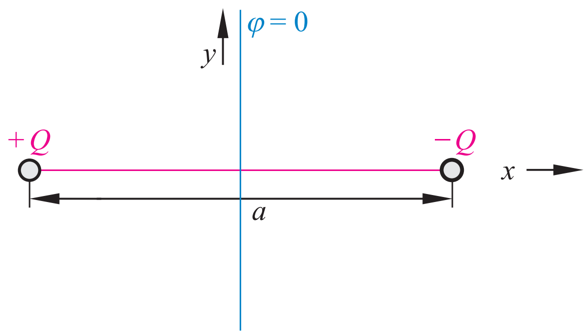
6) Mit der Spannung $U = \varphi_{L1} - \varphi_{L2}$ berechnen wir die Kapazität C der Doppelleitung:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \pi\,l}{\ln\dfrac{a}{r_L}}$$

Aufgabe 3.17

Eine Doppelleitung besteht aus zwei zylindrischen Leitern mit dem Durchmesser d_L, deren Achsen den Abstand a aufweisen. Ein Leiter trägt die Ladung Q und der andere die Ladung $-Q$.

Das Koordinatensystem wird zweckmäßig so gewählt, dass die beiden Leiter auf der x-Achse liegen, die damit auch eine Feldlinie ist. Die y-Achse ist die Äquipotenziallinie für $\varphi = 0$.



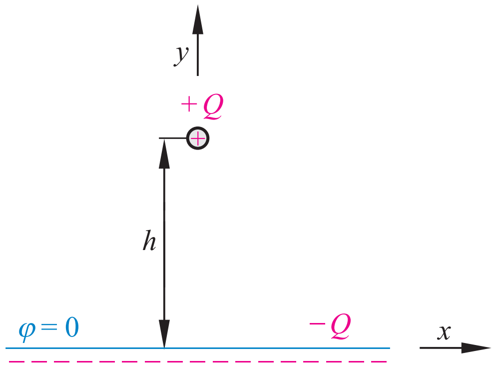
Die übrigen Äquipotenziallinien sind Kreise, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen; die übrigen Feldlinien sind Kreise, deren Mittelpunkte auf der y-Achse liegen. Zeichnen Sie das Feldbild der Doppelleitung (s. Aufgabe 3.16).

Hinweis: Ein derartiges Projekt wird zweckmäßig mit einem Mathematik-Programm wie z.B. MATLAB bearbeitet. Dabei gibt es wahrscheinlich elegantere Methoden als die folgende für das Zeichnen eines Kreises; bedenken Sie aber, dass die Kreise nicht vollständig dargestellt werden sollen, wenn die x-Werte einen Grenzwert x_{Grenz} oder die y-Werte einen Grenzwert y_{Grenz} überschreiten.

```
figure; axis equal; wu=pi/180; % Umrechnung Winkel
xm=0; ym=0; % Koordinaten des Mittelpunktes
r=2; % Radius
xa=xm; ya=ym; xGrenz=5; yGrenz=3;
for n=1:360
   xn=r*sin(wu*n)+xm; yn=r*cos(wu*n)+ym;
   if (abs(xn)<xGrenz) & (abs(yn)<yGrenz)
      plot([xa xn], [ya yn]); end; % Punkt in der Bildfläche
   xa=xn; ya=yn;
end;
```

Aufgabe 3.18

Eine Einfachleitung besteht aus einem zylindrischen Leiter, der die Ladung Q trägt und sich über einer weit ausgedehnten, leitfähigen Ebene befindet, der das Potenzial $\varphi = 0$ zugeordnet wird. Damit liegen bei der Einfachleitung dieselben Verhältnisse vor wie im linken Halbraum der Doppelleitung.



Annahmen: $l \gg h$; $d_L \ll h$.

Berechnen Sie die Kapazität der Einfachleitung in Luft für die Permeabilitätszahl $\varepsilon_r = 1$.

Aufgabe 3.19

Das Leiterseil einer Einfachleitung mit dem Durchmesser $d = 22$ mm befindet sich in der Höhe $h = 6$ m. Die Gleichspannung zwischen dem Seil und dem Erdboden, der als ebene leitfähige Fläche angenommen wird, hat den Wert 110 kV.

1) Berechnen Sie allgemein (d. h. mit Formelzeichen) die elektrische Feldstärke $E = f(y)$ auf der lotrechten Linie ($x = 0$) unter dem Leiterseil.

2) Welchen Betrag E_L hat die elektrische Feldstärke am unteren Rand des Leiterseiles und welchen Betrag E_0 am Erdboden, jeweils bei $x = 0$?

3) Welcher Betrag der elektrischen Feldstärke liegt im Punkt P_1 ($x_1 = 0$; $y_1 = 1{,}8$ m) vor, also in der Kopfhöhe eines Menschen, der direkt unter dem Leiterseil steht?

4) Welche Spannung U_1 liegt zwischen dem Punkt P_1 und dem Erdboden? Welche Folgen ergeben sich hieraus für einen Menschen, der direkt unter dem Leiterseil steht?

Lösung 3.17

Zunächst werden willkürlich Werte für den Radius r_L eines Leiters, den Leiterabstand a und die Anzahl der Potenziallinien gewählt.

Die Äquipotenziallinien werden mit der Standardfarbe Blau und die Feldlinien rot gezeichnet. Vorab wird die y-Achse als Äquipotenziallinie für $\varphi = 0$ und die x-Achse als Feldlinie geplottet; dazu werden geeignete Grenzwerte x_{Grenz} und y_{Grenz} gewählt.

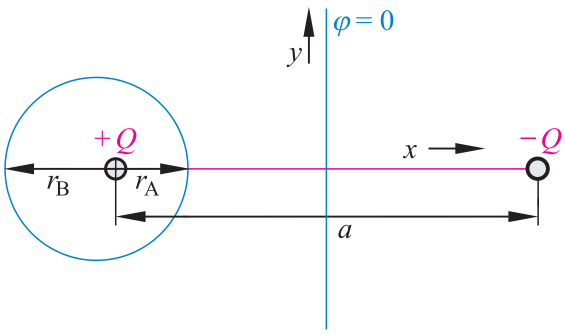
Bevor die Potenziallinien gezeichnet werden, wählen wir willkürlich einen Wert p für die Anzahl der Potenziallinien, die sich zwischen einer Leiterachse und der y-Achse befinden. Jeder dieser Potenziallinien ordnen wir einen Wert φ des Potenzials zu. Damit hat der linke Leiter, also der Leiter 1 (s. Aufgabe 3.16), das Potenzial $\varphi_{L1} = p$ und wir können entsprechend Gl. (3) der Lösung 3.16 für den Außenrand des Leiters 1 mit $r_1 = r_L$ und $r_2 = a - r_L$ ansetzen:

$$\varphi_L = p = \frac{Q}{\varepsilon_r\,\varepsilon_0 \cdot 2\,\pi\,l} \cdot \ln\frac{a - r_L}{r_L}$$

Damit berechnen wir den Quotienten q:

$$q = \frac{Q}{\varepsilon_r\,\varepsilon_0 \cdot 2\,\pi\,l} = \frac{p}{\ln\dfrac{a - r_L}{r_L}}$$

Jede andere Potenziallinie mit einem Potenzial $\varphi < p$ ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt auf der x-Achse, welcher die x-Achse zweimal schneidet, und zwar sowohl beim Radius r_A als auch beim Radius r_B.



Zur Berechnung von r_A setzen wir die Radien $r_1 = r_A$ und $r_2 = a - r_A$ in die Gl. (3) der Lösung 3.16 ein:

$$\varphi = q \cdot \ln\frac{a - r_A}{r_A}\,; \quad r_A = \frac{a}{e^{\varphi/q} + 1}$$

Zur Berechnung von r_B setzen wir die Radien $r_1 = r_B$ und $r_2 = a + r_B$ in die Gl. (3) der Lösung 3.16 ein:

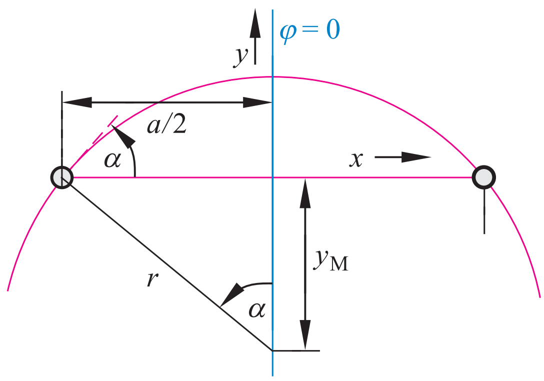
$$\varphi = q \cdot \ln\frac{a + r_B}{r_B}\,; \quad r_B = \frac{a}{e^{\varphi/q} - 1}$$

Die Äquipotenziallinie ist ein Kreis um den linken Leiter mit dem Radius $r = (r_A + r_B)/2$, dessen Mittelpunkt die Ortskoordinate $x_M = -(a + r_B - r_A)/2$ aufweist. Der Mittelpunkt des Kreises um den rechten Leiter hat die Ortskoordinate $x_M = (a + r_B - r_A)/2$.

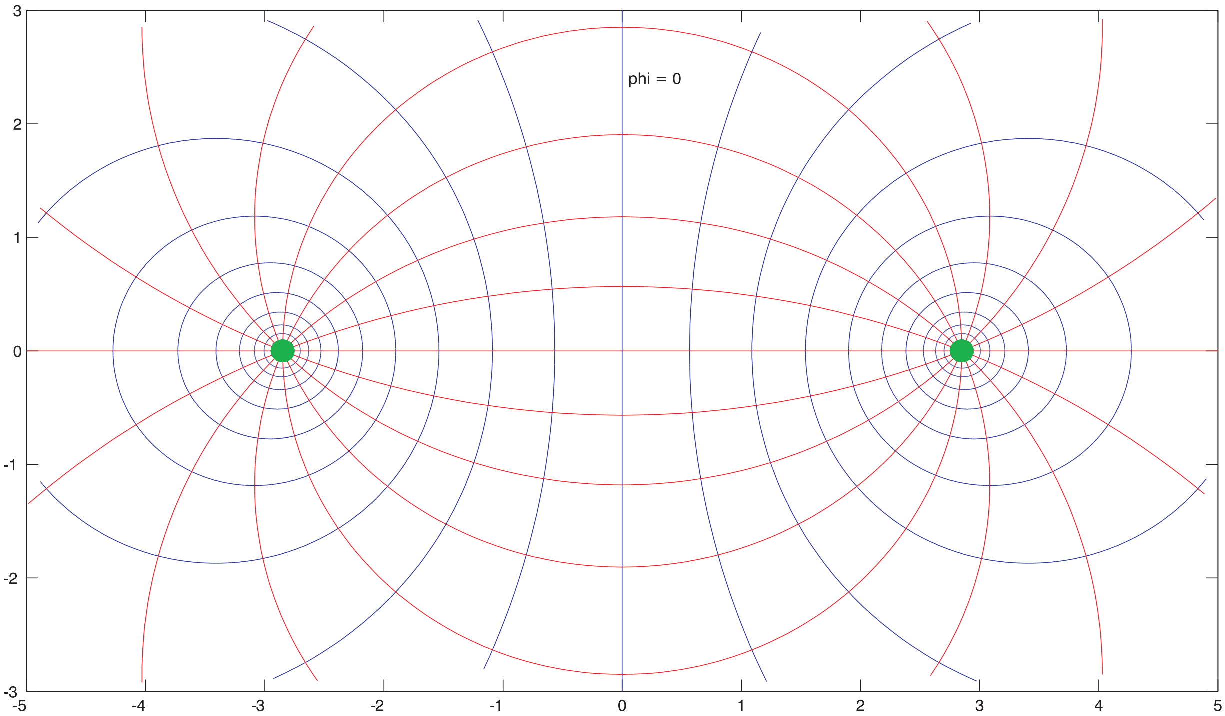
Wie schon erwähnt, ist die x-Achse eine Feldlinie; die übrigen Feldlinien sind Halbkreise, deren Mittelpunkte auf der y-Achse liegen.

Zwei Feldlinien sind Halbkreise um den Mittelpunkt $x_M = 0$; $y_M = 0$ mit dem Radius $a/2$, die wir zu einem Kreis zusammenfassen. Außerdem zeichnen wir in jeder Halbebene sechs weitere Teilkreise, die wir zu je drei Kreisen zusammenfassen.

Jeder Kreis „startet" beim Zentrum des linken Leiters mit einem Winkel α = 22,5°; 45°; 67,5° zur x-Achse. Mit $\tan\alpha = (a/2)/y_M$ berechnen wir die Orts-koordinate y_M und mit dem Hypotenusensatz des PYTHAGORAS den Radius r.



```
clc; % Kapitel 3, Aufgabe 17: Feldbild der Doppelleitung
wu=pi/180;
figure; axis equal; xg=4.9; yg=2.9; % Grenzwerte
plot([0 0], [-3 3]); hold on; text(0.05,2.4,'phi = 0'); % Äquip.linie phi=0
rL=0.1; % Leiterradius
a=5.7; % Abstand der Leiterachsen
anzpot=10; % Anzahl p der Potenziallinien auf einer Seite
q=anzpot/(log((a-rL)/rL)); % Vorfaktor Q / (2*pi*epsilon*l)
for phi=1:(anzpot-1) % insgesamt 2*anzpot+1 Äquipotenziallinien
    ra=a/(exp(phi/q)+1); rb=a/(exp(phi/q)-1);
    r=(rb+ra)/2; % Radius der Äquipotenziallinie
    xmpot=a/2+(rb-ra)/2; ym=0; % Mittelpunkt des Kreises
    for nL=-1:2:1 % beide Leiter mit xm=xmpot und xm=-xmpot
        xm=nL*xmpot; xa=xm; ya=r+ym;
        for n=1:360 wun=wu*n; xn=r*sin(wun)+xm; yn=r*cos(wun)+ym;
            if (abs(xn)<xg) & (abs(yn)<yg) plot([xa xn], [ya yn]); end;
            xa=xn; ya=yn;
        end;
    end;
end;
plot([-5 5], [0 0], 'r'); % Feldlinien
for nFeld=-3:3
    xm=0; % Mittelpunkt des Kreises
    if nFeld==0; ym=0; else ym=(a/2)/tan(nFeld*22.5*wu); end;
    r=sqrt((a/2)^2+ym^2); % Radius der Feldlinie
    xa=xm; ya=r+ym;
    for n=1:360 wun=wu*n; xn=r*sin(wun)+xm; yn=r*cos(wun)+ym;
        if (abs(xn)<xg) & (abs(yn)<yg) plot([xa xn], [ya yn], 'r'); end;
        xa=xn; ya=yn;
    end;
end;
ym=0; % Leiter grün ausgefüllt darstellen
for nL=-1:2:1
    xm=nL*(a/2); xa=xm; ya=0;
    for n=1:360
        wun=wu*n; xn=rL*sin(wun)+xm; yn=rL*cos(wun)+ym;
        plot([xa xn], [ya yn], 'g');
    end;
end
```



Lösung 3.18
Wir ersetzen in Gedanken die Mittelebene im Feldbild der Doppelleitung durch eine dünne, leitfähige Folie, auf der die Ladung Q influenziert wird. Zwischen dem Leiter 1 und der Folie liegt die Spannung $U/2$. Die Einfachleitung speichert also bei halber Spannung die gleiche Ladung wie die Doppelleitung und ihre Kapazität ist doppelt so groß. Entsprechend der Gl. (6) der Lösung 3.16 gilt für $h = a/2$:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\,\varepsilon_0 \cdot \pi\, l}{\ln \dfrac{2\,h}{r_\mathrm{L}}}$$

Lösung 3.19
1) Wir denken uns den Leiter der Einfachleitung an der leitfähigen Ebene gespiegelt und können mit den Gleichungen der Doppelleitung arbeiten. Das Potenzial eines Punktes P unter dem Leiterseil berechnen wir mit der Gl. (3) der Lösung 3.16, in die wir $r_1 = h - y$ und $r_2 = h + y$ einsetzen:

$$\varphi_\mathrm{P} = \frac{Q}{\varepsilon_\mathrm{r}\,\varepsilon_0 \cdot 2\,\pi\, l} \cdot \ln \frac{h+y}{h-y}$$

Den unbekannten Vorfaktor q berechnen wir, indem wir die Koordinate $y = h - d/2$ des unteren Randes vom Leiterseil einsetzen, der auf dem Potenzial 110 kV liegt:

$$110\ \mathrm{kV} = q \cdot \ln \frac{12\ \mathrm{m} - 11\ \mathrm{mm}}{11\ \mathrm{mm}}\,; \quad q = 15{,}73\ \mathrm{kV}$$

Die Gl. (3.35) gibt die Feldstärke E eines Punktes im Feld eines mit Q geladenen zylindrischen Leiters an. Der positiv geladene Leiter erzeugt die Feldstärke:

$$E_1 = \frac{Q}{\varepsilon_\mathrm{r}\,\varepsilon_0 \cdot 2\,\pi\, l\, r_1} = \frac{q}{r_1}$$

Der gespiegelte Leiter ist negativ geladen und erzeugt die Feldstärke: