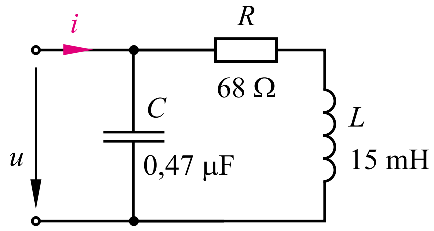
Nerreter, Grundlagen der Elektrotechnik
Carl Hanser Verlag München

9 Nichtsinusförmige Größen

Aufgabe 9.9
Die Klemmenspannung $u(t)$ der zweipoligen Schaltung hat die Grundfrequenz f_1 = 100 Hz und wird durch ihre FOURIER-Koeffizienten beschrieben.

k	0	1	2	3	4	5
u_{ak} in V	12	5,5	4,5	3	2	1
u_{bk} in V	-	3,5	−2,4	−1,1	0	0,6



1) Berechnen Sie das Amplituden- und das Phasenspektrum der Spannung $u(t)$.

2) Welche Effektivwerte haben die Spannung u und der Strom i?

3) Berechnen Sie die Wirk-, die Blind- und die Scheinleistung der zweipoligen Schaltung.

Aufgabe 9.10
Der Sinusspannung u_1 mit dem Scheitelwert $\hat{u}_1 = 25$ V werden von einer Begrenzerschaltung die Kuppen abgeschnitten, so dass die Spannung u_2 den Maximalwert 20 V aufweist. Berechnen Sie die FOURIER-Koeffizienten der Spannung u_2.

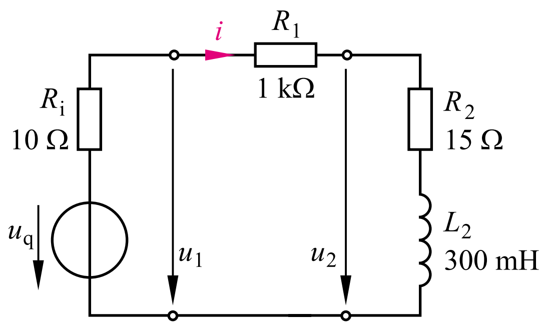
Aufgabe 9.11
Einem Gleichstrom I_0 = 2 A ist ein Sinusstrom i_1 mit dem Effektivwert I_1 = 2 A überlagert. Welchen Effektivwert hat der Strom $i = I_0 + i_1$?

Aufgabe 9.12
Führen Sie die Rücktransformation der im Beispiel 9.6 berechneten Spektraldichte durch und tragen Sie $x(t)$ als Funktion der Zeit auf.

Aufgabe 9.13
Berechnen Sie den Klirrfaktor und den Grundschwingungsgehalt der im Beispiel 4.2 beschriebenen Wechselspannung.

Aufgabe 9.14
Berechnen Sie den Klirrfaktor und den Grundschwingungsgehalt der in der Tab. 9.1 beschriebenen Sägezahnspannung.

Aufgabe 9.15
Die Schaltung wird von einer Quelle gespeist, deren Spannung $u_q(t)$ eine Rechteckspannung wie im Beispiel 9.1 mit der Periodendauer 20 ms ist.



1) Welchen Klirrfaktor k_q hat die Spannung $u_q(t)$?

2) Welchen Klirrfaktor k_i hat der Strom?

3) Welche Klirrfaktoren k_1 bzw. k_2 haben die Spannungen u_1 bzw. u_2?

4) Welchen Wert müsste der Widerstand R_1 aufweisen, damit der Klirrfaktor k_2 halb so groß ist wie beim Widerstand R_1 = 1 kΩ?

Lösung 9.9

1) Wir berechnen die Amplituden und die Nullphasenwinkel mit den Gln. (9.8 und 9.9).

k	0	1	2	3	4	5
u_{ak} in V	12	5,5	4,5	3	2	1
u_{bk} in V	-	3,5	−2,4	−1,1	0	0,6
$\hat{u}_k$ in V	12	6,52	5,1	3,2	2	1,166
φ_{uk}	-	−32,5°	28,1°	20,1°	0	−31°

2) Zunächst berechnen wir die Effektivwerte der Teilschwingungen:

$U_0 = 12$ V; $U_1 = 4{,}61$ V; $U_2 = 3{,}606$ V

$U_3 = 2{,}26$ V; $U_4 = 1{,}414$ V; $U_5 = 0{,}8246$ V

Mit der Gl. (9.17) erhalten wir den Effektivwert der Spannung:

$U = 13{,}64$ V

Der Strom hat den Gleichanteil:
$I_0 = U_0/R = 176{,}47$ mA

Mit dem Betrag des komplexen Leitwertes

$$\underline{Y} = \mathrm{j}\omega C + \frac{1}{R + \mathrm{j}\omega L}$$

berechnen wir die Amplituden $\hat{i}_k = Y_k\,\hat{u}_k$ der Teilschwingungen des Stromes:

k	1	2	3	4	5
Y_k in mS	14,53	14,03	13,26	12,33	11,31
φ_k	6,7°	13,2°	19°	24,2°	28,6°
$\hat{i}_k$ in mA	94,7	71,5	42,4	24,7	13,2

Zur Berechnung des Effektivwertes setzen wir für $k > 0$ die Gl. (9.13) in die Gl. (9.16) ein und erhalten schließlich:

$$I = \sqrt{I_0^2 + 0{,}5\sum_{k=1}^{5}\hat{i}_k^2} = 198{,}7 \text{ mA}$$

3) Die Scheinleistung erhalten wir mit der Gl. (6.16):

$S = U\,I = 2{,}71$ VA

Für die Wirkleistung setzen wir an:

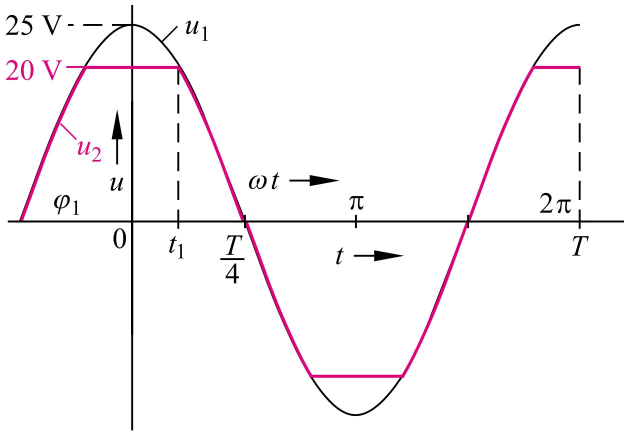
$$P = U_0 I_0 + 0{,}5\sum_{k=1}^{5}\hat{u}_k\,\hat{i}_k = 2{,}695 \text{ W}$$

Die Blindleistung ist für nichtsinusförmige Größen lediglich als Betrag definiert:

$$|Q| = \sqrt{S^2 - P^2} = 0{,}283 \text{ var}$$

Lösung 9.10

Wir wählen den Zeitnullpunkt der Spannung u_2 so, dass $u_2(t)$ eine gerade und alternierende Funktion ist; dabei sind sämtliche Koeffizienten $b_k = 0$ und die Ordnungszahlen von a_k sind ungerade ($k = 1, 3, 5 \ldots$).



Entsprechend Gl. (9.6) setzen wir an:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T u_2(t)\cdot\cos k\omega_1 t\ \mathrm{d}t$$

Wegen der Symmetrie der zu integrierenden Funktionen können wir schreiben:

$$a_k = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} u_2(t)\cdot\cos k\omega_1 t\;\mathrm{d}t$$

Für die Funktion $u_2(t)$ im Intervall $0 \le t \le T/4$ setzen wir an:
- im Intervall $0 \le t \le t_1$ ist $u_2(t) = 20\ \mathrm{V} = \mathrm{const.}$;
- im Intervall $t_1 \le t \le T/4$ ist $u_2(t) = 25\ \mathrm{V}\cdot\cos(\omega_1 t)$.

$$a_k = \frac{160\ \mathrm{V}}{T}\int_0^{t_1}\cos k\omega_1 t\,\mathrm{d}t + \frac{200\ \mathrm{V}}{T}\int_{t_1}^{T/4}\cos\omega_1 t\cdot\cos k\omega_1 t\,\mathrm{d}t$$

Man könnte nun daran denken, die Integrale von MATLAB lösen zu lassen. Dies ist leider nicht möglich, weil dabei ein Sonderfall auftritt, mit dem wir uns im Folgenden befassen werden.

Das erste Integral können wir problemlos berechnen:

$$\int_0^{t_1}\cos k\omega_1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k\omega_1}\sin k\omega_1 t_1$$

Beim zweiten Integral setzen wir zunächst $\alpha = k\,\omega_1 t$ sowie $\beta = \omega_1 t$ und formen mit der Gl. (A1.16), die im Anhang A1 steht, um:

$$\cos\omega_1 t\cdot\cos k\omega_1 t = \frac{1}{2}\cos(k+1)\,\omega_1 t + \frac{1}{2}\cos(k-1)\,\omega_1 t$$

Den ersten Summanden können wir wieder problemlos integrieren und erhalten:

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{T/4}\cos(k+1)\,\omega_1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(k+1)\,\omega_1}\left[\sin(k+1)\,\omega_1\frac{T}{4} - \sin(k+1)\,\omega_1 t_1\right]$$

Rein formell können wir auch den zweiten Summanden entsprechend integrieren:

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{T/4}\cos(k-1)\,\omega_1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(k-1)\,\omega_1}\left[\sin(k-1)\,\omega_1\frac{T}{4} - \sin(k-1)\,\omega_1 t_1\right]$$

Und dabei haben wir für $k = 1$ ein Problem, denn wegen $\sin(0) = 0$ steht hierbei ein unbestimmter Ausdruck $0/0$, der sich aber mit der Regel von BERNOULLI und DE L'HOSPITAL umformen lässt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Guilleaume Marquis de l'Hospital (1661 – 1704) aus Paris verfasste das erste Lehrbuch der Differenzialrechnung; es geht auf den Unterricht zurück, den er von Johann Bernoulli (1667 – 1748) aus Basel erhalten hatte. Letzterer war einer der führenden Mathematiker Europas; zu seinen Schülern gehörte auch L. Euler (s. Kap. 8).

Wir setzen $x = k - 1$ und bearbeiten den ersten sin-Term mit

$$f(x) = \sin x\omega_1\frac{T}{4}\,;\quad f'(x) = \omega_1\frac{T}{4}\cdot\cos x\omega_1\frac{T}{4}$$

$$g(x) = \omega_1 x\,;\qquad g'(x) = \omega_1$$

Beim Grenzübergang $x \to 0$ bleibt wegen $\cos(x) \to 1$ für den Quotienten aus $f(x)$ und $g(x)$ der Term $T/4$ übrig. Entsprechend gehen wir beim zweiten sin-Term vor und erhalten für $k = 1$ und $\cos 0 = 1$:

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{T/4}\cos\big((k-1)\,\omega_1 t\big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{T/4}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{T}{4} - t_1\right]$$

Das hätte man natürlich gleich so machen können. Nun schreiben wir ein MATLAB-Programm für die FOURIER-Koeffizienten und prüfen, ob die Ergebnisse richtig sind.

```
% Kapitel 9, Aufgabe 10
clc; figure;
T = 1;
T4=T/4;
plot([0 T], [0 0]); hold on;
plot([0 0], [-25 25]); hold on;
z=1000;
dT=T/z;
w1=2*pi/T;
v=8/T;
phi1=acos(20/25);
t1=T*phi1/(2*pi);
for n=1:101;
    k=2*n-1;
    p=k+1;
    m=k-1;
    int1=v*20*sin(k*w1*t1)/(k*w1);
    int2=v*12.5*(sin(p*w1*T4)/(p*w1)-sin(p*w1*t1)/(p*w1));
    if m>0; int3=v*12.5*(sin(m*w1*T4)/(m*w1)-sin(m*w1*t1)/(m*w1));
            else int3=v*12.5*(T4-t1); end;
    a(n)=int1+int2+int3;
    disp(' ');
    disp(['k = ',sprintf(' %3d ',k)]);
    disp(['a = ',sprintf(' %3.4f ',a(n))]);
end;
ta=0;
xa=20;
ya=25;
for m=1:1000;
    tn=ta+dT;
    xn=0; yn=25*cos(w1*tn);
    for n=1:101;
        k=2*n-1;
        xn=xn+a(n)*cos(k*w1*tn);
    end;
    plot([ta tn], [xa xn], 'r'); hold on;
    plot([ta tn], [ya yn]);
    ta=tn; xa=xn; ya=yn;
end;
```

Lösung 9.11

Diese Aufgabe, deren Lösung im Kap. 4 mit einigem Aufwand verbunden war, lässt sich mit der Gl. (9.16) problemlos lösen.

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2} = 2{,}828\ \text{A}$$

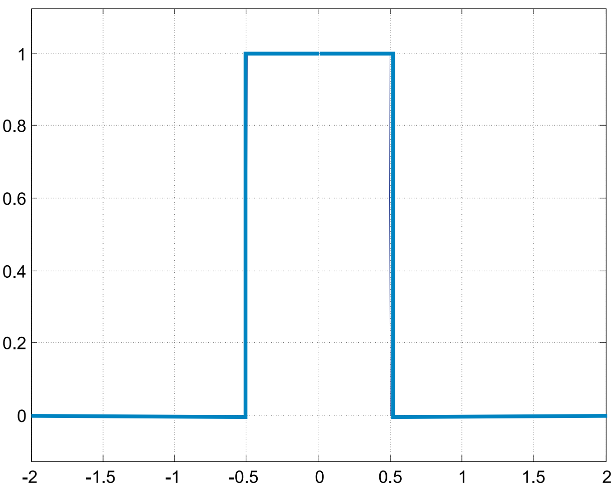
Lösung 9.12

Wir setzen das Ergebnis des Beispiels 9.6 in die Gl. (9.41) ein und berücksichtigen, dass die Spektraldichte $S(f)$ reell und symmetrisch zur Ordinate ist; der Imaginärteil der e-Funktion braucht deshalb nicht berücksichtigt zu werden.

$$x(t) = 2\int_0^{+\infty} \frac{h}{\pi f} \cdot \sin(b\,\pi f) \cdot e^{\,j\,2\pi f t}\,df$$

Mit dem MATLAB-Programm kann das Ergebnis geplottet werden..

```
% Kapitel 9, Aufgabe 12
clc
syms t x y z; figure;
b=1; h=1; vf=2*h*b/pi;
z=cos(2*pi*x*t)/x;
y=vf*int(sin(b*pi*x)*z,0,1000);
fplot(y,[-2,2]); grid;
```



Lösung 9.13

Wir entnehmen der Tab. 9.1 den FOURIER-Koeffizienten $a_1 = 8\,\hat{u}/\pi^2$ und berechnen damit den Effektivwert der Grundschwingung:

$$U_1 = \frac{8\,\hat{u}}{\sqrt{2}\,\pi^2}$$

Mit dem im Beispiel 4.2 berechneten Effektivwert

$$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$$

berechnen wir entsprechend Gl. (9.25) den Grundschwingungsgehalt:

$$g_u = \frac{U_1}{U} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{2}\,\pi^2} = 0{,}99274$$

Mit der Gl. (9.26) ergibt sich der Klirrfaktor:

$$k_u = \sqrt{1 - g_u^2} = 0{,}12$$

Lösung 9.14

Wir entnehmen der Tab. 9.1 den FOURIER-Koeffizienten $b_1 = -2\,\hat{u}/\pi$ und berechnen damit den Effektivwert der Grundschwingung:

$$U_1 = \frac{2\,\hat{u}}{\sqrt{2}\,\pi}$$

Der Effektivwert der Sägezahnschwingung lässt sich entsprechend dem Beispiel 4.2 berechnen:

$$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$$

Der Grundschwingungsgehalt ist:

$$g_u = \frac{U_1}{U} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}\,\pi} = 0{,}7797$$

Mit der Gl. (9.26) ergibt sich der Klirrfaktor:

$$k_u = \sqrt{1 - g_u^2} = 0{,}626$$

Lösung 9.15

1) Der Effektivwert der Grundschwingung ist:

$$U_{q1} = \frac{6{,}366\ \mathrm{V}}{\sqrt{2}} = 4{,}5\ \mathrm{V}$$

Mit dem Effektivwert $U_q = 5$ V ergibt sich der Grundschwingungsgehalt $g_q = 0{,}9$; damit berechnen wir den Klirrfaktor:

$$k_q = \sqrt{1 - g_q^2} = 0{,}435$$

2) Zur Berechnung der Grundschwingung und der Oberschwingungen des Stromes dividieren wir jede Teilschwingung der Spannung u_q durch den komplexen Widerstand bei der Kreisfrequenz $k\,\omega_1$:

$$I_k = \frac{U_k}{R + \mathrm{j}\,k\,\omega_1\,L_2}$$

Dabei sind die drei Widerstände der Schaltung zum Widerstand $R = R_i + R_1 + R_2$ zusammengefasst. Anschließend berechnen wir mit der Gl. (9.16) den Effektivwert und mit der Gl. (9.25) den Grundschwingungsgehalt g_i des Stromes; damit berechnen wir den Klirrfaktor:

$$k_i = \sqrt{1 - g_i^2} = 0{,}3824$$

3) Die Koeffizienten der Spannungen u_1 und u_2 berechnen wir mit den Teilschwingungen des Stromes:

$$U_{1k} = (R_1 + R_2 + \mathrm{j}\,k\,\omega_1\,L_2)\,I_k$$

$$U_{2k} = (R_2 + \mathrm{j}\,k\,\omega_1\,L_2)\,I_k$$

Damit ergeben sich die Klirrfaktoren $k_1 = 0{,}432$ und $k_2 = 0{,}934$.

4) Durch einige Versuche kann man herausfinden, dass sich für den Widerstand $R_1 = 112\ \Omega$ der Klirrfaktor $k_i = 0{,}1912$ ergibt.

```
% Kapitel 9, Aufgabe 15
clc;
Ri=10;
R1=1000;
R2=15;
R=Ri+R1+R2;
L=300e-3;
T=20e-3;
w1=2*pi/T;
kmax=101;
for k=1:2:kmax;
    Uq(k)=20/(sqrt(2)*pi*k);
    Z2=R2+j*k*w1*L;
    Z1=R1+Z2;
    Z=Ri+Z1;
    Istr(k)=Uq(k)/Z;
    U1(k)=Z1*Istr(k);
    U2(k)=Z2*Istr(k);
end;
I1=abs(Istr(1));
U11=abs(U1(1));
U21=abs(U2(1));
Ieff=0;
U1eff=0;
U2eff=0;
for k=1:2:kmax;
    Ieff=Ieff+abs(Istr(k))^2;
    U1eff=U1eff+abs(U1(k))^2;
    U2eff=U2eff+abs(U2(k))^2;
end;
Ieff=sqrt(Ieff);
U1eff=sqrt(U1eff);
U2eff=sqrt(U2eff);
ki=sqrt(1-(I1/Ieff)^2);
k1=sqrt(1-(U11/U1eff)^2);
k2=sqrt(1-(U21/U2eff)^2);
disp(['ki = ',sprintf(' %3.4f ',ki)]);
disp(['k1 = ',sprintf(' %3.4f ',k1)]);
disp(['k2 = ',sprintf(' %3.4f ',k2)]);
```