Nerreter, Grundlagen der Elektrotechnik
Carl Hanser Verlag München

5 Zeitabhängige Felder

Aufgabe 5.13
Die spannungsabhängige Kapazität eines Kondensators kann für den Bereich 0 ... 60 V durch folgende Gleichung angenähert werden:

$$C = C_{max} \cdot e^{-U/100\,V}$$

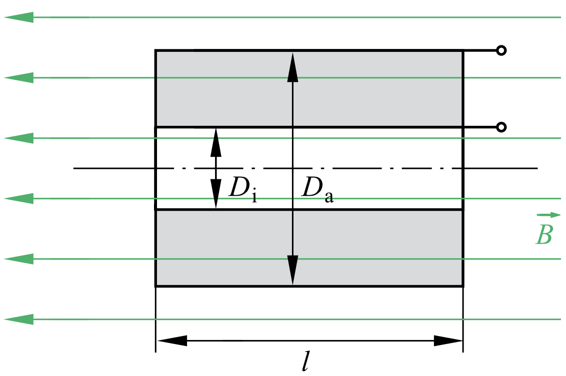
Geben Sie allgemein die differenzielle Kapazität C_d als Funktion der Spannung an.
Stellen Sie die Funktionen $C = f(U)$ und $C_d = f(U)$ für $C_{max} = 470$ nF grafisch dar und berechnen Sie die Energie, die dieser Kondensator bei 60 V enthält.

Aufgabe 5.14
Für die Selbstinduktivität einer kreisförmigen Leiterschleife mit dem Radius R und dem Drahtdurchmesser $d = 2r$ wird in der Literatur als Näherung angegeben:

$$L = \mu_0\,\mu_r\,R\left(\ln\frac{R}{r} + 0{,}25\right)$$

Welchen Durchmesser $D = 2R$ hat eine Leiterschleife in Luft mit dem Drahtdurchmesser $d = 0{,}2$ mm, deren Induktivität 1 µH beträgt?

Aufgabe 5.15
Eine Zylinderspule wird von einem homogenen Magnetfeld der Flussdichte B durchsetzt, dessen Richtung mit der Richtung der Spulenachse übereinstimmt. Die Wicklung besteht aus 100 Lagen mit je 200 Windungen. Geben Sie den Verkettungsfluss als Funktion der Flussdichte für folgende Abmessungen an: $l = 60$ mm; $D_i = 20$ mm; $D_a = 80$ mm.



⚠ Bei dieser Aufgabe liegt es nahe, die Lösung dadurch zu vereinfachen, dass man den mittleren Durchmesser 50 mm berechnet und die 20000 Windungen mit der zugehörigen Fläche multipliziert. Lassen Sie sich nicht auf diesen Irrweg locken, der zu einer falschen Lösung führt.

Aufgabe 5.16
1) Die Zylinderspule aus der Aufgabe 5.15 liegt zunächst waagrecht in der Süd-Nord-Richtung des Erdmagnetfeldes, die mit einem Kompass bestimmt wurde, und wird dann um 90° in der horizontalen Lage gedreht. Dabei wird das Integral der Spannung zwischen den Klemmen über der Zeit gemessen:

$$\int u\,dt = -0{,}91\ \text{mV s}$$

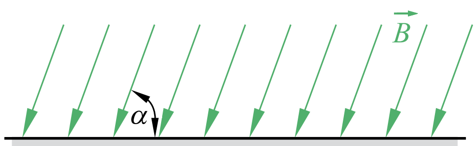
Berechnen Sie die Horizontalkomponente B_H des Erdmagnetfeldes.

2) Die Zylinderspule wird nun so aufgestellt, dass sie von der Vertikalkomponente des Erdmagnetfeldes durchsetzt wird, und aus dieser Lage um 90° so gedreht. dass sie nicht mehr vom Erdmagnetfeld durchsetzt wird. Dabei wird gemessen:

$$\int u\,dt = -2{,}25\ \text{mV s}$$

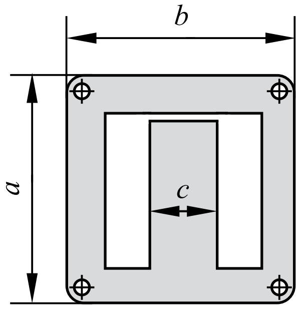
Berechnen Sie die Vertikalkomponente B_V des Erdmagnetfeldes.

3) Welchen Betrag und welchen Winkel zur Erdoberfläche hat der Flussdichtevektor des Erdmagnetfeldes am Ort der Messung?



Aufgabe 5.17

Ein Kleintransformator mit dem Kern M85 hat laut Normblatt folgende Maße: $a = b = 85$ mm; $c = 29$ mm. Außerdem ist im Normblatt der Eisenquerschnitt 8,6 cm^2 angegeben.



Im Normblatt sind die Nennleistung $P_{2N} = 87$ W sowie die Flussdichte $B_{max} = 1{,}41$ T und die Stromdichte $J = 3{,}6$ A/mm^2 genannt; die Eisenverluste sind für 50 Hz mit 5,5 W und die Kupferverluste mit 11,2 W angegeben. Außerdem ist auf der Primärseite die Blindleistung 53 var zu berücksichtigen.

Der Kleintransformator soll die Spannung $U_1 = 230$ V auf die Sekundärspannung 15 V herabsetzen. Berechnen Sie für die sekundäre Leistung 87 W beim Leistungsfaktor $\cos\varphi = 1$ die Windungszahlen und die Drahtquerschnitte.

Aufgabe 5.18

Mit welcher Drehzahl müsste die Spule aus der Aufgabe 5.15 im Erdmagnetfeld gedreht werden, damit durch den Induktionsvorgang an ihren Klemmen die Leerlaufspannung mit dem Scheitelwert 1 V entsteht? Die Spule soll zum Zeitpunkt $t = 0$ vom Erdmagnetfeld durchsetzt werden, dessen Flussdichte B in der Aufgabe 5.16 berechnet wurde. Nach einer Vierteldrehung soll die Flussverkettung null sein.

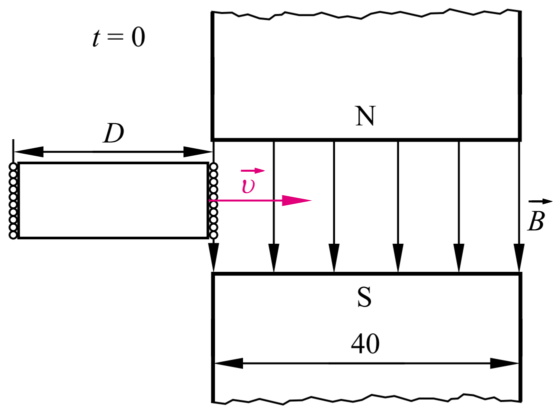
Die durch den Induktionsvorgang entstehende Spannung müsste von einem mitrotierenden Messgerät gemessen werden, das leistungslos misst und seine Messwerte durch Funk an eine ruhende Beobachtungsstation sendet. Schleifringe wären unbrauchbar, da an ihnen ein Spannungsabfall entsteht, der das Messergebnis verfälscht.

Aufgabe 5.19

Welche Flussdichte hat das Magnetfeld im Beispiel 5.4 unter der Annahme, dass die Spule einen quadratischen Querschnitt aufweist?

Aufgabe 5.20

Eine rechtssinnig gewickelte Spule mit dem Durchmesser $D = 30$ mm und der Windungszahl $N = 10$ wird mit der konstanten Geschwindigkeit $\upsilon = 1$ m/s in das Magnetfeld des Beispiels 5.4 bewegt. Wenn sich die Spule vollständig im Magnetfeld befindet, wird sie von dem Fluss Φ_{max} durchsetzt.



Der Fluss Φ, der die Spule durchsetzt, steigt vom Wert $\Phi_0 = 0$, der zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ vorliegt, nichtlinear bis zum Wert Φ_{max} an; dieser Wert wird zum Zeitpunkt $t_1 = D/\upsilon = 30$ ms erreicht.

Welche Spannung wird in der Spule induziert? Geben Sie die Spannung allgemein als Funktion der Zeit an und stellen sie die Spannung grafisch dar.

Lösung 5.13

Zunächst berechnen wir mit Hilfe der Gl. (3.23) die Ladung als Funktion der Spannung:

$$Q = U\,C_{max} \cdot e^{-U/100\,\mathrm{V}}$$

Beim Differenzieren dieses Ausdrucks wenden wir die Produktregel an; dabei gilt für $y = u \cdot \upsilon$:

$$y' = u \cdot \upsilon' + u' \cdot \upsilon$$

Wir setzen

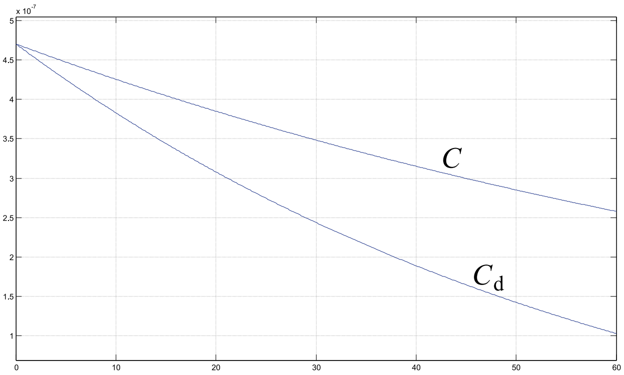
$$u = U;\, u' = 1;\, \upsilon = \mathrm{e}^{-U/100\,\mathrm{V}};\, \upsilon' = -\frac{1}{100\ \mathrm{V}} \cdot \mathrm{e}^{-U/100\,\mathrm{V}}$$

und erhalten mit der Gl. (3.25) die differenzielle Kapazität C_d als Funktion der Spannung:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}U} = C_\mathrm{max}\,(u\,\upsilon' + u'\upsilon) = C_\mathrm{max}\left(1 - \frac{U}{100\ \mathrm{V}}\right) \cdot \mathrm{e}^{-U/100\,\mathrm{V}}$$

Die grafische Darstellung nehmen wir mit einem MATLAB-Programm vor.

```
syms a C Cd Cmax U;
a=100;
Cmax=470e-9;
C=Cmax*exp(-U/a);
ezplot(C,[0,60]); grid; hold on;
Cd=diff(U*C);
ezplot(Cd,[0,60]);
```



Zur Berechnung der Energie mit der Gl. (5.9) wenden wir zweimal die partielle Integration an und erhalten mit $a = 100$ V:

$$\int u\ C_\mathrm{d}\ \mathrm{d}u = C_\mathrm{max}\left(U^2 + a\ U + a^2\right) \cdot \mathrm{e}^{-U/100\,\mathrm{V}}$$

Nach dem Einsetzen der Grenzen erhalten wir schließlich die Energie $W = 355{,}65\ \mu\mathrm{J}$. Dieses Ergebnis liefert uns auch das MATLAB-Programm.

```
clc;
syms a C Cd Cmax U;
a=100;
Cmax=470e-9;
C=Cmax*exp(-U/a);
Cd=diff(U*C);
W=int(U*Cd,0,60);
Wn=vpa(Wn,10);
disp('W = '); disp(Wn);
```

Lösung 5.14

Wir setzen $L = 1\ \mu\mathrm{H}$ und $r = 0{,}1$ mm sowie $\mu_\mathrm{r} = 1$ und die Gl. (3.47) in die gegebene Gleichung ein und erhalten eine nichtlineare Gleichung, die wir mit einem MATLAB-Programm lösen.

```
syms R x
my0=pi*4.0e-7;
d=0.2e-3;
r=d/2;
x=solve(L==my0*R*(log(R/r)+0.25)),R);
R=vpa(R);
D=2*R;
```

Als Ergebnis erhalten wir den Durchmesser:
$D = 21{,}95$ cm

Lösung 5.15

Wenn die 200 Windungen einer Lage die Spulenlänge 60 mm ergeben, dann ist der Drahtdurchmesser:

$$d = 60\ \mathrm{mm} / 200 = 0{,}3\ \mathrm{mm}$$

Wir sehen die Mittelachse des Drahtes als Rand der vom Fluss durchsetzten Fläche an und erhalten für eine Windung der innersten Lage die Fläche:
$A_1 = \pi\,(D_\mathrm{i} + d)^2/4$

Bei jeder folgenden Lage hat der Durchmesser der Querschnittsfläche einen um $2\,d$ größeren Wert. Mit dem Laufindex $k = 1$ ... 100 für die Lagen setzen wir allgemein an:

$$A_k = \pi\left[D_\mathrm{i} + (2\,k - 1)\cdot d\right]^2/4$$

Mit der Gl. (3.42) ergibt sich der magnetische Fluss einer Lage für die $N_L = 200$ Windungen jeder Lage:

$$\Phi_k = N_L B A_k = \pi N_L B [D_i + (2k-1) \cdot d]^2/4$$

Nun setzen wir mit der Gl. (5.21) an:

$$\Psi_m = \sum_{k=1}^{100} \Phi_k = \frac{\pi B N_L}{4} \sum_{k=1}^{100} [D_i + (2k-1) \cdot d]^2$$

Die Auswertung mit einem MATLAB-Programm ergibt:

$$\Psi_m = 44 \text{ m}^2 \cdot B$$

Lösung 5.16
Wir lösen zunächst die Gl. (5.22) nach dem Verkettungsfluss auf:

$$\Psi_{m2} - \Psi_{m1} = \int_{t_1}^{t_2} u \, dt$$

1) Mit $\Psi_{m2} = 0$ und dem gegebenen Wert für das Integral berechnen wir zunächst $\Psi_{m1} = 0{,}91$ mV s. Dies setzen wir in das Ergebnis der Aufgabe 5.15 ein und berechnen die horizontale Komponente der Flussdichte des Edmagnetfelds:

$$B_H = 20{,}68 \text{ µT}$$

2) Mit $\Psi_{m2} = 0$ und dem gegebenen Wert für das Integral berechnen wir $\Psi_{m1} = 2{,}25$ mV s. Dies setzen wir in das Ergebnis der Aufgabe 5.15 ein und berechnen die vertikale Komponente der Flussdichte:

$$B_V = 51{,}14 \text{ µT}$$

3) Der Betrag und der Winkel der Flussdichte sind:

$$B = \sqrt{B_V^2 + B_H^2} = 55{,}16 \text{ µT}$$

$$\alpha = \arctan \frac{B_V}{B_H} = 68°$$

Lösung 5.17
Mit der Gl. (3.42) berechnen wir zunächst den Scheitelwert des magnetischen Flusses:

$$\Phi_{max} = B_{max} A_{Fe} = 1{,}21 \text{ mVs}$$

Mit der Gl. (5.26) berechnen wir für $U_1 = 230$ V bzw. für $U_2 = 15$ V:

$$N_1 = \frac{U_1}{4{,}44 \, f \, \Phi_{max}} = 855$$

$$N_2 = \frac{U_2}{4{,}44 \, f \, \Phi_{max}} = 56$$

Die Wirkleistung auf der Primärseite ist:

$$P_1 = P_2 + P_{Cu} + P_{Fe} = 103{,}7 \text{ W}$$

Hiermit und mit der Blindleistung $Q_1 = 53$ var berechnen wir die Scheinleistung:

$$S_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = 116{,}5 \text{ VA} = U_1 I_1$$

Mit dem Strom $I_1 = 506{,}5$ mA und der gegebenen Stromdichte 3,6 A/mm² berechnen wir den erforderlichen Leiterquerschnitt $A_{Cu1} = I_1/J = 0{,}141$ mm². Als Drahtdurchmesser ergibt sich hieraus 0,4237 mm und wir wählen $d_1 = 0{,}5$ mm.
Mit der Wirkleistung $P_2 = 87 \text{ W} = U_2 I_2$ berechnen wir $I_2 = 5{,}8$ A und damit den Leiterquerschnitt:

$$A_{Cu2} = 1{,}61 \text{ mm}$$

Als Drahtdurchmesser ergibt sich hieraus 1,43 mm und wir wählen $d_2 = 1{,}5$ mm.

Lösung 5.18
Wir setzen $\Psi_m = \Psi_{mmax} \cdot \cos \omega t$ in die Gl. (5.20) ein:

$$u = \omega \, \Psi_{mmax} \cdot (-\sin \omega t)$$

Der Scheitelwert der Spannung ist:

$$\hat{u} = \omega \, \Psi_{mmax} = 2 \pi f \, \Psi_{mmax}$$

Nun setzen wir das Ergebnis der Aufgabe 5.15 sowie die Flussdichte 55,16 µT aus dem Ergebnis der Aufgabe 5.16 ein und lösen nach der Frequenz f auf:

$f = 65{,}58\ \text{s}^{-1}$

Die gesuchte Drehzahl ist:

$n = f = 3935\ \text{min}^{-1}$

Lösung 5.19
Wir setzen $A = b^2 = 625\ \text{mm}^2 = 625 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2$ sowie den Fluss $\Phi_{\text{max}} = 0{,}625\ \text{mVs}$ in die Gl. (3.42) ein und berechnen:

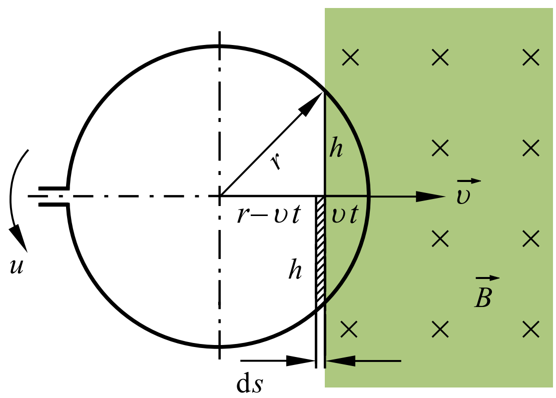
$B = 1{,}0\ \text{T}$

Lösung 5.20
Mit $A = \pi\, D^2/4 = 7{,}07 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$ und der Flussdichte $B = 1{,}0\ \text{T}$ aus der Aufgabe 5.18 ergibt sich der maximale Fluss:

$\Phi_{\text{max}} = 7{,}07 \cdot 10^{-4}\ \text{Vs}$

Bei konstanter Flussdichte nimmt der Fluss $\Phi = B\,A$ beim Eintreten der Spule in das Magnetfeld in gleicher Weise zu wie die Fläche. Mit der Gl. (5.20) setzen wir an:

$$u = N\,B\,\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$$



Wie die Skizze zeigt, ist die Schleife zum Zeitpunkt t um das Stück $\upsilon\, t$ in den Feldraum eingetreten. In der Zeitspanne dt rückt sie um den Weg ds vor, wobei sich die Fläche um den infinitesimal kleinen Streifen $\mathrm{d}A = 2\,h \cdot \mathrm{d}s$ ändert. Wir setzen dies in die Gleichung für die Spannung ein und erhalten mit $\upsilon = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$:

$u = 2\,h \cdot N\,B \cdot \upsilon$

Nun benötigen wir die Höhe h als Funktion der Zeit und setzen mit $r = D/2$ an:

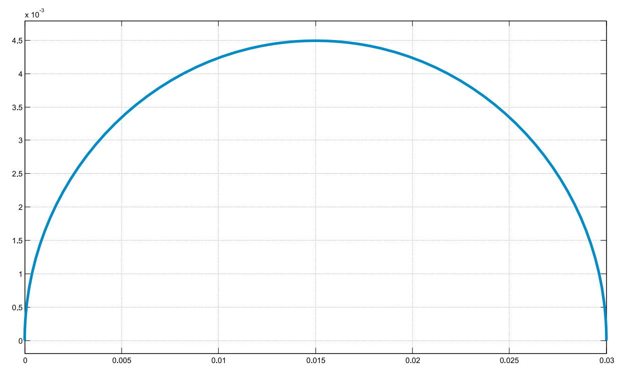
$h^2 + (r - \upsilon\, t)^2 = r^2$

Wir lösen nach h auf und setzen in die Gleichung für die Spannung ein:

$$u = 2\,N\,B\,\upsilon\sqrt{r^2 - (r - \upsilon\, t)^2}$$

Dies werten wir mit einem MATLAB-Programm aus.

```
% Kapitel 5, Aufgabe 19
syms u t;
clc; figure;
N=10; D=30e-3; r=D/2; v=1; B=1;
u=2*N*B*r*sqrt(r^2-(r-v*t)^2);
ezplot(u,[0,0.03]); grid;
```



Das Maximum $u_{\text{max}} = 4{,}5\ \text{mV}$ der Spannung liegt zum Zeitpunkt $t = 15\ \text{ms}$ vor. Die Funktion $u = f(t)$ ist offensichtlich ein Halbkreis.