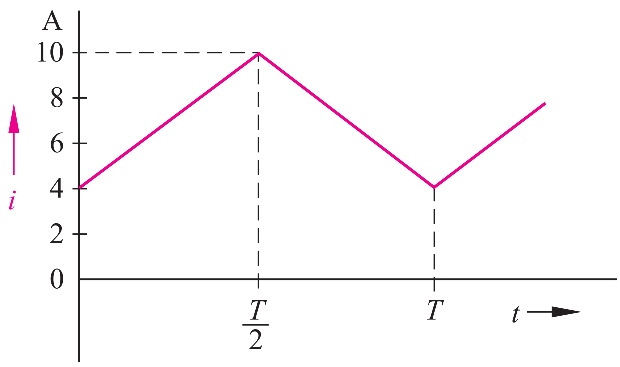
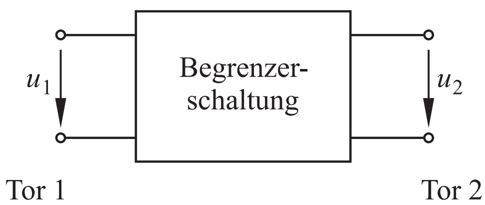
Nerreter, Grundlagen der Elektrotechnik
Carl Hanser Verlag München

4 Zeitabhängige Größen

Aufgabe 4.6
Ein periodischer Strom hat zum Zeitpunkt $t = 0$ den Augenblickswert $i = 4$ A und nimmt von da an linear zu, bis er zum Zeitpunkt $T/2$ den Augenblickswert 10 A erreicht; von da an nimmt er linear ab. Welchen Effektivwert hat dieser Strom?



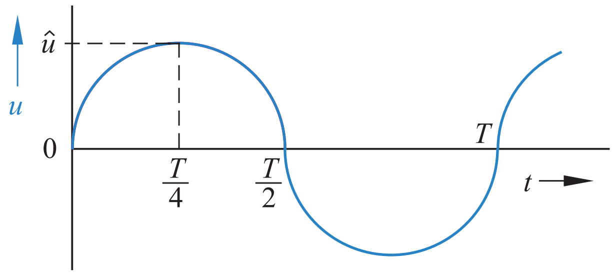
Aufgabe 4.7
Einer Sinusspannung u_1 mit dem Scheitelwert $\hat{u}_1 = 25$ V werden von einer Begrenzerschaltung die Kuppen abgeschnitten, so dass die Spannung u_2 den Maximalwert 20 V aufweist. Welchen Effektivwert hat diese Spannung u_2?



Aufgabe 4.8
In einem Generator werden in sechs Spulen unterschiedlicher Lage, die in Reihe geschaltet sind, die Sinusspannungen $\underline{U}_1 = 25\ \text{V}\,\angle 0°$; $\underline{U}_2 = 25\ \text{V}\,\angle 10°$ … $\underline{U}_6 = 25\ \text{V}\,\angle 50°$ induziert. Welchen Effektivwert hat die gesamte Spannung der Reihenschaltung?

Aufgabe 4.9
Einem Gleichstrom $I_0 = 2$ A ist ein Sinusstrom i_1 mit dem Effektivwert $I_1 = 2$ A überlagert. Welchen Effektivwert hat der Strom $i = I_0 + i_1$?

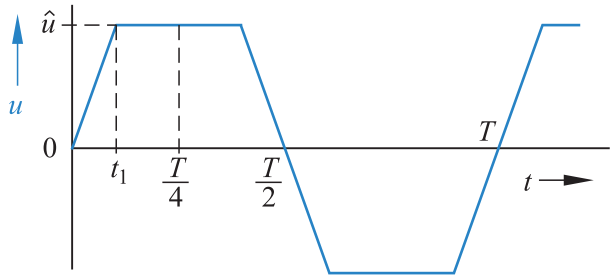
Aufgabe 4.10
In der Aufgabe 5.19 wird gezeigt, wie eine halbkreisförmige Spannung entstehen kann. Berechnen Sie den Effektivwert und den Scheitelfaktor dieser Spannung unter der Annahme, dass $u(t)$ periodisch sei.



Hinweis: Verschieben Sie die Ordinate um $T/4$ und arbeiten Sie mit den bezogenen Größen $u/\hat{u}$ sowie $t/(T/4)$. Die Gleichung für den Viertelkreis lautet:

$$\left(\frac{t}{T/4}\right)^2 + \left(\frac{u}{\hat{u}}\right)^2 = 1$$

Aufgabe 4.11
Berechnen Sie allgemein (d. h. mit Formelzeichen) für einen linearen Anstieg mit der Dauer $0 \le t_1 \le T/4$ den Effektivwert der periodischen Spannung. Welchen Wert muss der Quotient t_1/T haben, damit der Scheitelfaktor der Spannung $u(t)$ gleich dem einer Sinusspannung ist?



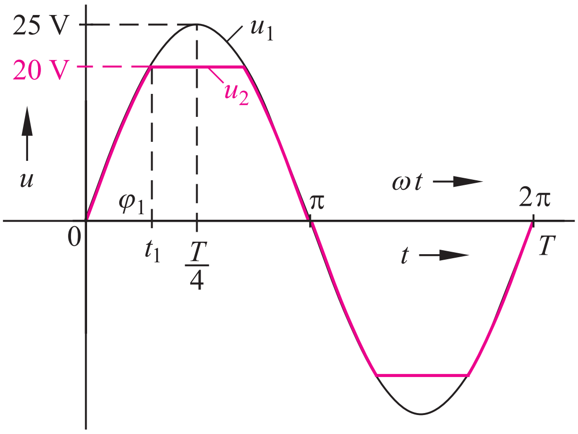
Lösung 4.6
Geradengleichung: $i = 4\,\text{A} + m\,t$

Bei $t = T/2$ ist $i = 10$ A; $m = 12\,\text{A}/T$

Einsetzen der Geradengleichung in die Gl. (4.9):

$$I = \sqrt{\frac{2}{T}\int_0^{T/2} i^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{T}\int_0^{T/2} (4\,\text{A} + m\,t)^2\,\mathrm{d}t} = 7{,}211\ \text{A}$$

Lösung 4.7
Die Sinusspannung $u_1 = \sin\omega t$ geht beim Wert 20 V in eine Gerade über.



Zunächst berechnen wir den Winkel φ_1, bei dem die Sinuskurve in die Gerade übergeht:

$$\varphi_1 = \arcsin(20/25) = 53{,}13°$$

Für den zugehörigen Zeitpunkt t_1 setzen wir an:

$$\frac{t_1}{T} = \frac{\varphi_1}{360°}$$

Damit berechnen wir:

$$t_1 = 0{,}14758\ T$$

Wegen der Symmetrie brauchen wir bei der Berechnung des Effektivwerts nur von $t = 0$ bis $T/4$ zu integrieren. Wir setzen entsprechend Gl. (4.10) an:

$$U = \sqrt{\frac{4}{T}\left[\int_0^{t_1} (\hat{u}_1 \sin\omega t)^2\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{T/4} (20\ \text{V})^2\,\mathrm{d}t\right]}$$

Das zweite Integral lässt sich direkt berechnen:

$$\frac{4}{T}\left[\int_{t_1}^{T/4} (20\ \text{V})^2\,\mathrm{d}t\right] = \frac{4}{T}\cdot 400\ \text{V}\cdot\left[\frac{T}{4} - t_1\right] = 163{,}9\ \text{V}^2$$

Vor der Berechnung des ersten Integrals formen wir mit der Gl. (A1.29), die im Anhang steht, den Integranden um:

$$(\hat{u}_1 \sin\omega t)^2 = 0{,}5\,\hat{u}_1^2(1 - \cos 2\omega t)$$

Damit berechnen wir das erste Integral:

$$\frac{4}{T}\int_0^{t_1} (\hat{u}_1 \sin\omega t)^2 = \frac{2}{T}\hat{u}_1^2\,t_1 - \frac{\hat{u}_1^2}{2\pi}\sin 2\varphi_1 = 89\ \text{V}^2$$

Nun addieren wir die beiden Zwischenergebnisse und ziehen die Wurzel. Der gesuchte Effektivwert ist:

$$U = 15{,}9\ \text{V}$$

Im MATLAB-Programm kann für die Periodendauer T ein beliebiger Wert eingesetzt werden.

```
clc
syms w t;
u1max=25;
u2max=20;
T=1;
w=2*pi/T;
f=(u1max*sin(w*t))^2;
phi1=asin(u2max/u1max); % Winkel im Bogenmaß
t1=phi1*T/(2*pi);
F=int(f);
U=sqrt(4*(subs(F,t1)+u2max^2*(T/4-t1))/T);
disp(['Effektivwert: U = ',sprintf(' %2.4f ',U),' V']);
```

Lösung 4.8
Die Summe der sechs Spannungen hat den Effektivwert 143,4 V und den Winkel 25°.

Lösung 4.9
Wir setzen den Strom

$$i = I_0 + \hat{\imath}_1 \cos \omega t$$

in die Gl. (4.9) ein:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\left[\int_0^T I_0^2\,\mathrm{d}t + \int_0^T I_0\,\hat{\imath}_1 \cos\omega t\,\mathrm{d}t + \int_0^T (\hat{\imath}_1 \cos\omega t)^2\mathrm{d}t\right]}$$

Das erste Integral ist:

$$\int_0^T I_0^2\,\mathrm{d}t = I_0^2\,T$$

Das zweite Integral ist:

$$\int_0^T I_0\,\hat{\imath}_1 \cos\omega t\,\mathrm{d}t = 0$$

Das dritte Integral ist:

$$\int_0^T (\hat{\imath}_1 \cos\omega t)^2\mathrm{d}t = I_1^2 T$$

Damit erhalten wir das Ergebnis:

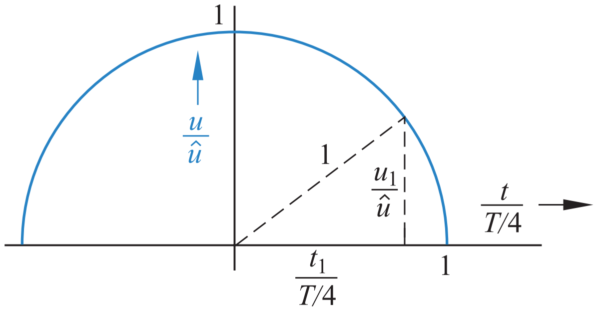
$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2} = 2{,}83\ \mathrm{A}$$

Lösung 4.10
Wir brauchen nur über einen der insgesamt 4 Viertelkreise zu integrieren, lösen die gegebene Gleichung für den Viertelkreis nach u^2 auf und und setzen gemäß Gl. (4.10) an:

$$U = \sqrt{\frac{4}{T}\int_0^{T/4} u^2\,\mathrm{d}t} = \hat{u}\sqrt{\frac{4}{T}\int_0^{T/4}\left(1 - 16\,\frac{t^2}{T^2}\right)\mathrm{d}t} = \hat{u}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Der gesuchte Scheitelfaktor ist:

$$C = \frac{U}{\hat{u}} = 0{,}8165$$



Lösung 4.11
Geradengleichung: $u = m\,t = (\hat{u}/t_1)\,t$

Mit der Gl. (4.10) ergibt sich:

$$U = \hat{u}\sqrt{\frac{4}{T}\left[\int_0^{t_1}\left(\frac{t}{t_1}\right)^2\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{T/4}\mathrm{d}t\right]} = \hat{u}\sqrt{1 - \frac{8\,t_1}{3\,T}}$$

Im Sonderfall $t_1 = 0$ ist $U = \hat{u}$ und für $t_1 = T/4$ erhalten wir das gleiche Ergebnis wie im Beispiel 4.2.

Mit der Gl. (4.21) berechnen wir den Scheitelfaktor $C = \sqrt{2}$ der Sinusspannung und setzen an:

$$\sqrt{1 - \frac{8\,t_1}{3\,T}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Damit berechnen wir den Wert des Quotienten t_1/T, für welchen der Scheitelfaktor der Spannung $u(t)$ gleich dem einer Sinusspannung ist:

$$\frac{t_1}{T} = \frac{3}{16} = 0{,}1875$$