In Physik und Technik werden FOURIER-Reihen vielfach angewendet, z. B. bei der Gezeitenberechnung oder bei der Beschreibung von Klängen und Tönen. Man begnügt sich dabei stets mit Näherungen und begrenzt die Ordnungszahl auf einen Wert n:

$$x(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \cos(k\omega_1 t + \varphi_k) \tag{9.3}$$

Das Zusammensetzen der Teilschwingungen zu einer Gesamtschwingung bezeichnet man als **Synthese** (synthesis).

9.2 Harmonische Analyse

Die Faktoren x_k und der Gleichanteil x_0 werden **FOURIER-Koeffizienten** genannt. Diese Koeffizienten und die zugehörigen Nullphasenwinkel werden insgesamt als **Spektrum** (spectrum) bezeichnet.
Wir wollen uns nun der Frage zuwenden, wie man diese Koeffizienten einer bekannten Funktion bestimmt.

Man bezeichnet die Ermittlung der FOURIER-Koeffizienten einer gegebenen Funktion als **harmonische Analyse** (harmonic analysis). In der Praxis gibt es hierfür folgende Verfahren:

- Ist die Funktion mathematisch definiert, so können die FOURIER-Koeffizienten berechnet werden; dies ist jedoch im Allgemeinen nicht erforderlich, weil die Ergebnisse für viele in der Technik wichtige Funktionen tabelliert sind (s. Tab. 9.1).
- Ist die Funktion als Liniendiagramm gegeben, so kann sie mit der **schnellen FOURIER-Transformation** (fast Fourier transform, **FFT**) analysiert werden. Geeignete Programme gibt es in großer Zahl. Auch mit Micro-Cap ist eine FFT möglich; wir wollen uns damit im Abschnitt 9.2.2 befassen.
- Kann die Funktion gemessen werden, so lässt sich z. B. mit einem modernen Digital-Oszilloskop, einem FFT-Analysator oder einem Spektrum-Analysator eine harmonische Analyse durchführen.

9.2.1 Berechnung der FOURIER-Koeffizienten

Zur Berechnung der FOURIER-Koeffizienten einer periodischen Funktion $x(t)$ wandeln wir den Ansatz nach Gl. (9.3) in die R-Form um:

$$x(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cdot \cos k\omega_1 t + b_k \cdot \sin k\omega_1 t \right) \tag{9.4}$$

Der Gleichanteil x_0 kann entsprechend Gl. (4.4) berechnet werden:

$$x_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\ \mathrm{d}t \tag{9.5}$$

Die Koeffizienten a_k und b_k lassen sich mit folgenden Gleichungen berechnen:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cdot\cos k\omega_1 t\ \mathrm{d}t \tag{9.6}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cdot\sin k\omega_1 t\ \mathrm{d}t \tag{9.7}$$

Für die folgenden Überlegungen nehmen wir an, dass die Funktion $x(t)$ keinen Gleichanteil enthält.
Die Berechnung der Koeffizienten a_k und b_k wird einfacher, wenn der Zeitpunkt $t = 0$ geeignet gewählt wird:

- Ist die Funktion $x(t)$ eine **gerade Funktion**, für die $x(t) = x(-t)$ gilt, so enthält sie ausschließlich cos-Terme und es sind sämtliche Koeffizienten $b_k = 0$; ein Beispiel hierfür ist die Dreieckfunktion (s. Tab. 9.1).
- Ist $x(t)$ eine **ungerade Funktion**, für die $x(t) = -x(-t)$ gilt, so enthält sie ausschließlich sin-Terme und es sind sämtliche Koeffizienten $a_k = 0$; ein Beispiel hierfür ist die Sägezahnfunktion (s. Tab. 9.1).
- Ist $x(t)$ **alternierend** und es gilt $x(t) = -x(t + T/2)$, so sind sämtliche Ordnungszahlen ungerade ($k = 1, 3, 5 \ldots$); ein Beispiel hierfür ist die Dreieckfunktion (s. Tab. 9.1).

Beispiel 9.1
Wir wollen die Rechteckspannung (Bild 9.1) analysieren und stellen zunächst fest, dass ihr arithmetischer Mittelwert $x_0 = 0$ ist. Da es sich um eine gerade Funktion handelt, sind sämtliche Koeffizienten $b_k = 0$. Die ungeraden Ordnungszahlen der alternierenden Funktion berechnen wir mit der Gl. (9.6):

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cdot\cos k\omega_1 t\ \mathrm{d}t = \frac{8}{T}\cdot 5\ \mathrm{V}\int_0^{T/4}\cos k\omega_1 t\ \mathrm{d}t$$

$$a_k = \frac{8}{k\omega_1 T}\cdot 5\ \mathrm{V}\cdot\left[\sin k\omega_1 t\right]_0^{T/4} = \sin\left(\frac{k\,\pi}{2}\right)\cdot\frac{6{,}366\ \mathrm{V}}{k};\quad k = 1, 3, 5 \ldots$$

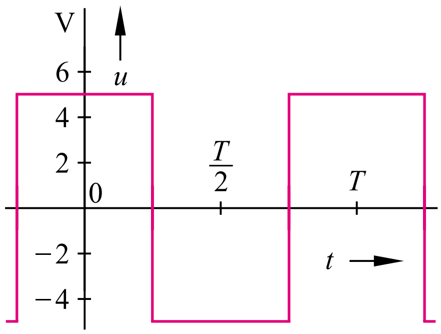
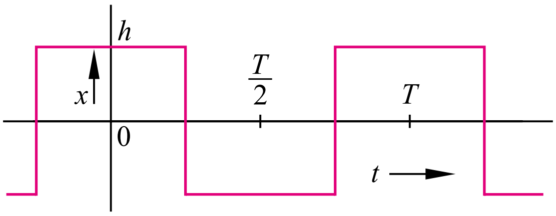


Bild 9.1 Rechteckspannung

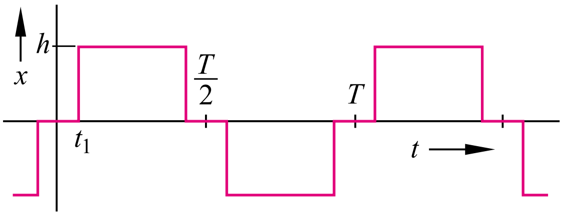
Tabelle 9.1 Fourier-Koeffizienten

Rechteck ohne Pausen



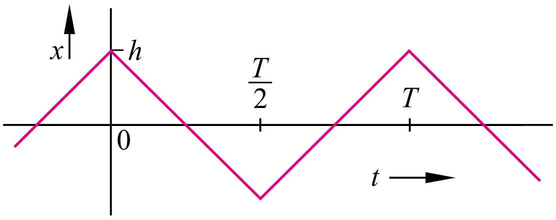
$x_0 = 0\,;\;\; a_k = \sin\left(\frac{k\,\pi}{2}\right)\cdot\frac{4\,h}{\pi\,k}\,;\;\; b_k = 0\,;\;\; k = 1, 3, 5\,\ldots$

Rechteck mit Pausen



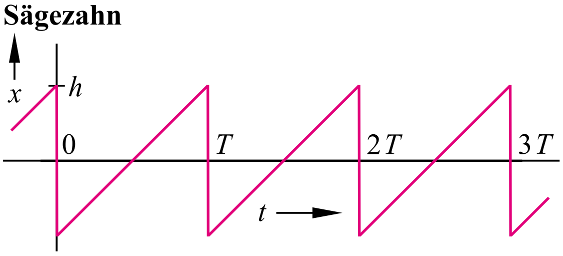
$x_0 = 0\,;\; a_k = 0\,;\;\; b_k = \frac{4\,h}{\pi\,k}\cos(k\,\omega_1 t_1)\,;\; k = 1, 3, 5\,\ldots$

Gleichschenkliges Dreieck



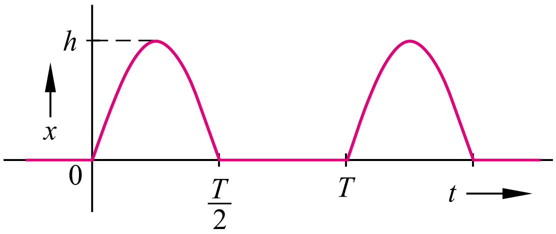
$x_0 = 0\,;\;\; a_k = \frac{8\,h}{(\pi\,k)^2}\,;\;\; b_k = 0\,;\;\; k = 1, 3, 5\,\ldots$

Sägezahn



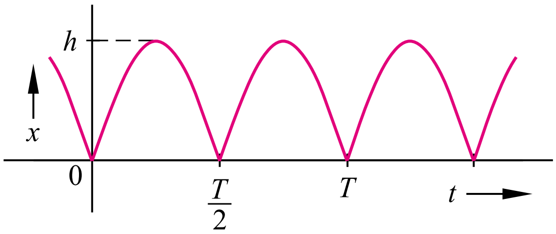
$x_0 = 0\,;\; a_k = 0\,;\;\; b_k = -\frac{2\,h}{\pi\,k}\,;\; k = 1, 2, 3\,\ldots$

Sinusbögen (Einpuls-Gleichrichtung)



$x_0 = \frac{h}{\pi}\,;\;\; a_k = \frac{2\,h}{\pi\,(1-k^2)}\,;\; b_1 = \frac{h}{2}\,;\;\; k = 2, 4, 6\,\ldots$

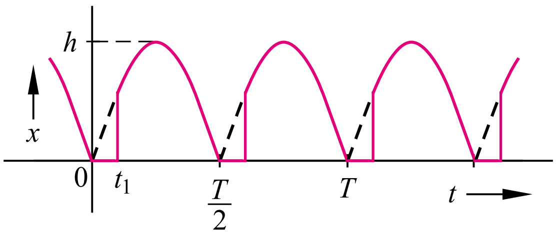
Sinusbögen (Zweipuls-Gleichrichtung)



$x_0 = \frac{2\,h}{\pi}\,;\;\; a_k = \frac{4\,h}{\pi\,(1-k^2)}\,;\; b_k = 0\,;\;\; k = 2, 4, 6\,\ldots$

Angeschnittene Sinusbögen (Zweipuls-Gleichr.)

Zündwinkel: $\alpha = \omega_1\,t_1\,;\quad k = 2, 4, 6\,\ldots$



$$x_0 = \frac{2\,h}{\pi}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$a_k = \frac{2\,h\,(k\sin\alpha\,\sin k\alpha + 1 + \cos\alpha\,\cos k\alpha)}{\pi\,(1-k^2)}$$

$$b_k = \frac{2\,h\,(\cos\alpha\,\sin k\alpha\; - \;k\sin\alpha\,\cos k\alpha)}{\pi\,(1-k^2)}$$

Mit den Koeffizienten a_k und b_k können die Amplituden und die Nullphasenwinkel der Teilschwingungen berechnet werden:

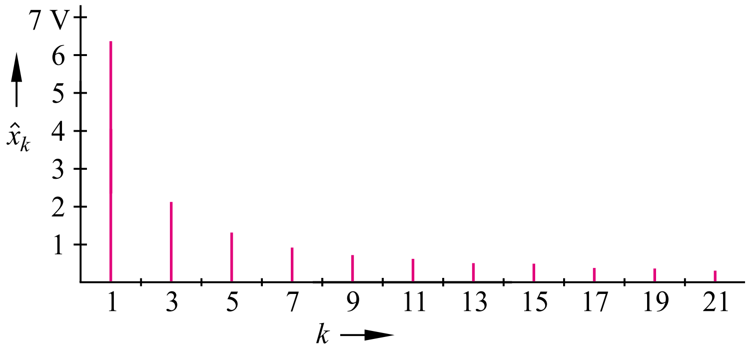
$$\hat{x}_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \tag{9.8}$$

$$\varphi_k = -\arctan \frac{b_k}{a_k} \tag{9.9}$$

Da man bei einer einfachen Anwendung der Gl. (9.9) lediglich den Hauptwert der arctan-Funktion erhält, wertet man die Gln. (9.8 und 9.9) zweckmäßig mit einem MATLAB-Programm aus.

In der Tab. 9.1 sind die Ergebnisse als Formeln dargestellt und daher wenig anschaulich. Für eine bessere Darstellung werden beim **Linienspektrum** die Amplituden und Nullphasenwinkel mit zur Frequenzachse senkrechten Linien über der Frequenz oder der Ordnungszahl k aufgetragen; dabei zeigt das **Amplitudenspektrum** die Amplituden und das **Phasenspektrum** die Nullphasenwinkel der Teilschwingungen.

Beispiel 9.2
Wir wollen das Amplitudenspektrum der im Bild 9.1 dargestellten Rechteckspannung zeichnen, deren Koeffizienten a_k und b_k wir im Beispiel 9.1 berechnet haben.
Mit der Gl. (9.8) berechnen wir die Amplituden. Wegen $b_k = 0$ sind sämtliche $\hat{x}_k = a_k$. Die Nullphasenwinkel der Teilschwingungen sind $\varphi_k = 0$ für $k = 1, 5, 9 \ldots$ bzw. $\varphi_k = \pi$ für $k = 3, 7, 11 \ldots$



9.2.2 Analyse mit Micro-Cap

Mit der Transientanalyse von Micro-Cap kann eine harmonische Analyse durchgeführt werden, wenn das Programm PROBE von der zu analysierenden Funktion genau eine Periode oder ein ganzes Vielfaches einer Periode anzeigt. Dabei werden die Harmonischen in einer Art Liniendiagramm des Amplitudenspektrums als Funktion der Frequenz dargestellt.

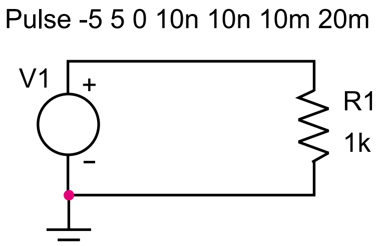


Bild 9.2 Schaltung zum Beispiel 9.3

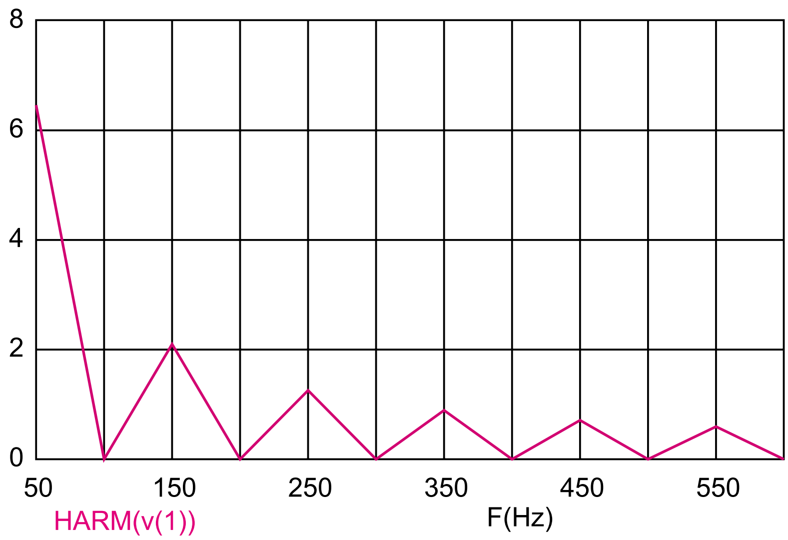
Der Widerstand in dieser Schaltung ist scheinbar restlos überflüssig, denn wir benötigen ja nur die Spannung der Quelle. Sie können ja einmal spaßeshalber den Widerstand weglassen und sich ansehen, wie Micro-Cap darauf reagiert.

Beispiel 9.3

Wir wollen das Amplitudenspektrum der im Bild 9.1 dargestellten Rechteckspannung mit Micro-Cap (MC) erstellen.

Zur Erzeugung der Rechteckspannung verwenden wir die Quelle Voltage Source, bei der wir die im Bild 9.2 angegebenen Werte (s. Bild 8.15) einstellen.

Bei Analysis und Transient öffnet sich ein Fenster, in dem wir bei Maximum Run Time 20m und bei Maximum Time Step 0.01m eintragen. Bei X Expression wählen wir F und bei Y Expression HARM(v(1)). Für die Darstellung tragen wir bei X Range 600,50,50 und bei Y Range 8,0,2 ein.

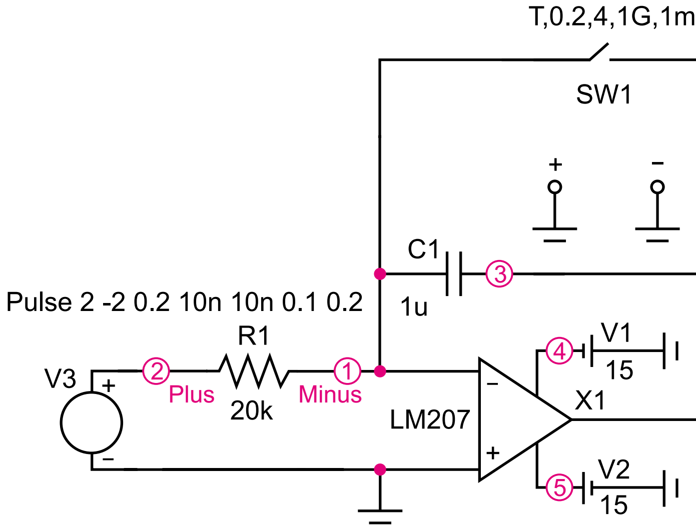


Aus dem Bild können wir die Werte schlecht ablesen. Deshalb rufen wir unter Scope einen Cursor auf und lassen uns in einem Fenster die Zahlenwerte anzeigen.

Frequenz	Ordnungszahl	Amplitude Gl. (9.6)	Amplitude MC
50 Hz	$k = 1$	6,366 V	6,366 V
150 Hz	$k = 3$	2,122 V	2,114 V
250 Hz	$k = 5$	1,273 V	1,272 V

Aufgabe 9.1

Die Schaltung mit dem Integrierer (s. Abschn. 12.6.5) erzeugt eine Dreieckspannung. Bestimmen Sie mit Micro-Cap deren Periodendauer T und berechnen Sie das Amplitudenspektrum. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen aus der Tab. 9.1.



Aufgabe 9.2
Mit der in der Aufgabe 9.1 gegebenen Schaltung, welche die Spannung der Pulsquelle integriert, können auch die FOURIER-Koeffizienten einer Sägezahn-Spannung ermittelt werden. Wählen Sie geeignete Werte für die Transient-Analyse mit Micro-Cap; berechnen Sie auch die Ergebnisse mit den in der Tab. 9.1 gegebenen Geichungen.

Aufgabe 9.3
Entwickeln Sie eine Schaltung, mit der Sinusbögen der Einpuls-Gleichrichtung erzeugt werden, und bestimmen Sie deren FOURIER-Koeffizienten mit Micro-Cap. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen, die Sie mit den in der Tab. 9.1 genannten Gleichungen berechnen.

Fragen
- Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen der Periode einer nichtsinusförmigen Größe und der Grundfrequenz.
- Wie wird eine FOURIER-Reihe angesetzt?
- Was ist eine Grundschwingung, was sind Oberschwingungen?
- Erläutern Sie die Begriffe harmonische Analyse und Synthese.
- Was versteht man unter der Abkürzung FFT?
- Was ist eine gerade und was eine ungerade Funktion?
- Welche Besonderheit weist eine nichtsinusförmige Spannung auf, die ausschließlich durch cos-Terme beschrieben wird?
- Welche Besonderheit weist ein nichtsinusförmiger Strom auf, der sich ausschließlich durch sin-Terme beschreiben lässt?
- Was ist ein Linienspektrum?
- Erläutern Sie die Begriffe Amplitudenspektrum und Phasenspektrum.

9.3 Eigenschaften periodischer Größen

9.3.1 Wirkleistung

Wir wollen zunächst ein Tor betrachten, an dem die Spannung u und der Strom i durch je eine FOURIER-Reihe mit gleicher Grundfrequenz beschrieben werden, und setzen hierfür an:

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{n} \hat{u}_k \cdot \cos(k\omega_1 t + \varphi_{uk}) \tag{9.10}$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{n} \hat{i}_k \cdot \cos(k\omega_1 t + \varphi_{ik}) \tag{9.11}$$