

DFT - Diskrete FOURIER-Transformation

Im Abschn. 9.4.2 wurde die FOURIER-Transformation einer nichtperiodischen Größe $x(t)$ beschrieben, die im gesamten Zeitbereich bekannt sein muss; bei den Beispielen und Aufgaben im Abschn. 9.4 ist $x(t)$ innerhalb der Impulsbreite b mathematisch definiert und außerhalb der Impulsbreite b ist $x(t) = 0$.

Wird nun aber $x(t)$ gemessen und ist nicht als Funktion definiert, so liegt für die Impulsbreite b eine endliche Anzahl von **Abtastwerten** x_n vor. In diesem Fall kann die Spektraldichte *nicht* mit der Gl. (9.40) berechnet werden. Es ist jedoch mit der **diskreten FOURIER-Transformation** (*discrete Fourier transform, DFT*) möglich, die Spektraldichte \underline{S}_d näherungsweise zu bestimmen.

Wir wählen $2N + 1$ Abtastwerte in gleichen Zeitabständen T_A und legen den Zeitnullpunkt in die Mitte der Beobachtungsdauer $2N T_A$. Bei der Berechnung der Spektraldichte \underline{S}_d tritt eine Summe an die Stelle des Integrals in der Gl. (9.40) und es wird berücksichtigt, dass die Spektraldichte \underline{S}_d nicht mehr für jede beliebige Frequenz f , sondern nur für k Frequenzwerte $f_k = k f_1$ vorliegt:

$$\underline{S}_d(f_k) = \sum_{n=-N}^N x_n \cdot e^{-j 2\pi k f_1 t_n \cdot T_A}$$

Der Kehrwert f_A des Abtastintervalls T_A wird als **Abtastfrequenz** bezeichnet. Die Spektraldichte \underline{S}_d braucht nur für die Frequenzwerte $f_k = k f_1$ mit $0 \leq k \leq N$ berechnet zu werden, denn für die Werte mit negativer Ordnungszahl k gilt:

$$\underline{S}_d(f_{-k}) = \underline{S}_d^*(f_k)$$

Die Spektraldichte \underline{S}_d ist mit f_A periodisch. Wegen dieser Redundanz können ihre Werte nur für Frequenzen im Bereich $-f_A/2 \leq f_k \leq f_A/2$ berechnet werden. Aus diesem Grund darf die Funktion $x(t)$ keine Frequenzen enthalten, die größer als $f_A/2$ sind. Diese Forderung ist das **Abtasttheorem** von SHANNON:

Damit ein Signal aus dem diskreten Spektrum rekonstruiert werden kann, muss die Abtastfrequenz mindestens doppelt so groß sein wie die höchste, im abgetasteten Signal enthaltene Frequenz.

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so kommt es zu einer Signalverfälschung, die als **aliasing** bezeichnet wird. In der Praxis filtert man das Signal mit einem Tiefpass, dessen Grenzfrequenz kleiner als $f_A/2$ ist.

Claude Elwood Shannon (1916 – 2001) studierte Mathematik und Elektrotechnik. Ab 1941 arbeitete bei den Bell Labs und veröffentlichte dort 1948 den Artikel **A Mathematical Theorie of Communication**. Von 1958–1978 war er Professor am MIT in Boston.

Ergänzung zum Buch:
Wolfgang Nerreter
Grundlagen der Elektrotechnik
ISBN 3-446-40414-4
Carl Hanser Verlag München
aktualisiert: 28.12.2007