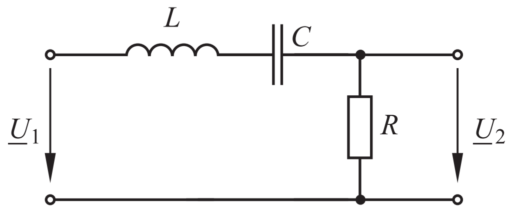
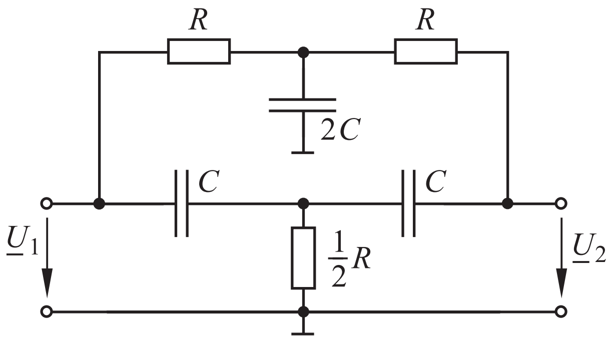
Aufgabe 6.29
Welchen maximalen Betrag $T_{u\max}$ hat der Spannungs-Übertragungsfaktor des Tiefpasses 1. Ordnung mit Grundeintoren (Bild 6.38)? Bei welchen Frequenzen liegt dieser maximale Betrag vor? Berechnen Sie außerdem das Maß a_u und den Winkel φ_u für die normierten Frequenzen 0,01; 0,1; 1; 10 und 100.

Aufgabe 6.30
Ein **Bandpass** (band-pass filter) ist ein Filter mit einem Durchlassbereich bei mittleren Frequenzen und je einem Sperrbereich bei tiefen und bei hohen Frequenzen. Eine Realisierung ist z. B. mit den Grundeintoren L und C in Reihenschaltung möglich.



1) Geben Sie allgemein (d. h. mit Formelzeichen) den Spannungs-Übertragungsfaktor des Bandpasses an. Bei welcher Frequenz hat der Betrag des Spannungs-Übertragungsfaktors ein Maximum?
2) Welche Grenzfrequenzen hat der Bandpass für C= 1,5 nF, L=30 mH und R = 400 Ω?

Aufgabe 6.31
Eine **Bandsperre** (band-elimination filter) ist ein Filter mit einem Sperrbereich bei mittleren und je einem Durchlassbereich bei tiefen und hohen Frequenzen.



1) Geben Sie allgemein (d. h. mit Formelzeichen) den Spannungs-Übertragungsfaktor des Doppel-T-Filters an.

⚠ Arbeiten Sie auf keinen Fall mit Maschen- und Knotengleichungen, sondern setzen Sie geeignete Matrizen der beiden Teilschaltungen an und fassen Sie diese Matrizen zur Matrix der Gesamtschaltung zusammen. Wie man den Spannungs-Übertragungsfaktor erhält, ist im Abschn. 6.5.1 beschrieben.

2) Bei welchen Frequenzen nimmt der Betrag des Spannungs-Übertragungsfaktors einen Extremwert an? Um welche Extremwerte handelt es sich dabei?

3) Berechnen Sie die Grenzfrequenzen.

Lösung 6.28
1) Bei sehr niedrigen Frequenzen $f \to 0$ fällt am Grundeintor L wegen $Z_L = \omega L \to 0$ keine Spannung ab und das Grundeintor C hat einen sehr hohen Betrag $Z_C = 1/(\omega C) \to \infty$, der wesentlich größer als R ist; deshalb ist $U_{20} = U_1 = U_q = 5$ V.

2) Der Spannungs-Übertragungsfaktor

$$\underline{T}_u = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \mathrm{j}\omega L + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + \mathrm{j}\omega CR}$$

hat den Betrag:

$$T_u = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}}$$

Bei konstanter Spannung U_1 liegt das Maximum von U_2 beim Maximum des Betrages T_u vor. Dabei hat der Nenner und damit der Radikand ein Minimum. Wir bilden zunächst die Ableitung

$$\mathrm{Rad} = (1-\omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\ \mathrm{Rad}\ \right] = 4\,(LC)^2\omega^3 + (2C^2R^2 - 4\,LC)\omega$$

und setzen diese gleich null. Damit berechnen wir die Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{4\,LC - 2\,C^2R^2}{4\,(LC)^2}} = 623{,}875\ \mathrm{s}^{-1}$$

Das Maximum der Spannung U_2 liegt bei der Frequenz 99,3 Hz vor und hat den Betrag U_2 = 5,98 V. Die Spannung U_2 steigt im Durchlassbereich zunächst an und fällt oberhalb von 99,3 Hz ab.

3) Der Spannungs-Übertragungsfaktor hat bei der Grenzfrequenz den Betrag $1/\sqrt{2}$ und es ist:

$$(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2 = 2$$

Die Lösung dieser biquadratischen Gleichung ergibt die Grenz-Kreisfrequenz ω_g = 1094,6 s^{-1}. Die zugehörige Grenzfrequenz ist f_g = 174,2 Hz.

Lösung 6.29
Der maximale Betrag $T_{u\,\max}$ = 1 liegt bei $\omega \to 0$ und damit für $f \to 0$ vor. Wir verwenden die Grenz-Kreisfrequenz

$$\omega_g = \frac{1}{CR}$$

gemäß Gl. (6.94) als Bezugsgröße und erhalten den Spannungs-Übertragungsfaktor:

$$\underline{T}_u = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\Omega}$$

Wir setzen die gegebenen Werte für Ω in diese Gleichung ein und berechnen:

$\Omega = 0{,}01$; $a_u = 0$; $\varphi_u = -0{,}6°$
$\Omega = 0{,}1$; $a_u = -0{,}04$ dB; $\varphi_u = -5{,}7°$
$\Omega = 1$; $a_u = -3{,}01$ dB; $\varphi_u = -45°$
$\Omega = 10$; $a_u = -20$ dB; $\varphi_u = -84{,}3°$
$\Omega = 100$; $a_u = -40$ dB; $\varphi_u = -89{,}4°$

Lösung 6.30
1) Mit der Spannungsteilerregel setzen wir an:

$$\underline{T}_u = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R + \mathrm{j}\omega L + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\left(\dfrac{\omega L}{R} - \dfrac{1}{R\omega C}\right)}$$

Der Betrag des Spannungs-Übertragungsfaktors hat das Maximum $T_{u\max} = 1$ bei der Frequenz, für welche der Klammerausdruck den Wert null annimmt:

$$\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{R\omega C}\right) = 0\,;\quad f_r = \frac{1}{2\,\pi\,\sqrt{LC}}$$

Diese Frequenz ist die Resonanzfrequenz f_r des Reihenschwingkreises (s. Abschn. 6.2.3); sie wird auch als **Bandmittenfrequenz** $f_m = f_r$ des Bandpasses bezeichnet:

$f_m = f_r$ = 23,7 kHz

2) Bei einer Grenzfrequenz hat der Spannungs-Übertragungsfaktor den Betrag $1/\sqrt{2}$; dabei hat der Klammerausdruck in der Gleichung für den komplexen Spannungs-Übertragungsfaktor $\underline{T}_u$ entweder den Wert +1 oder den Wert –1.

Wir beginnen mit dem Wert +1 und setzen an:

$$\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{R\omega C}\right) = 1\,;\quad f_g = 22{,}69\ \mathrm{kHz}$$

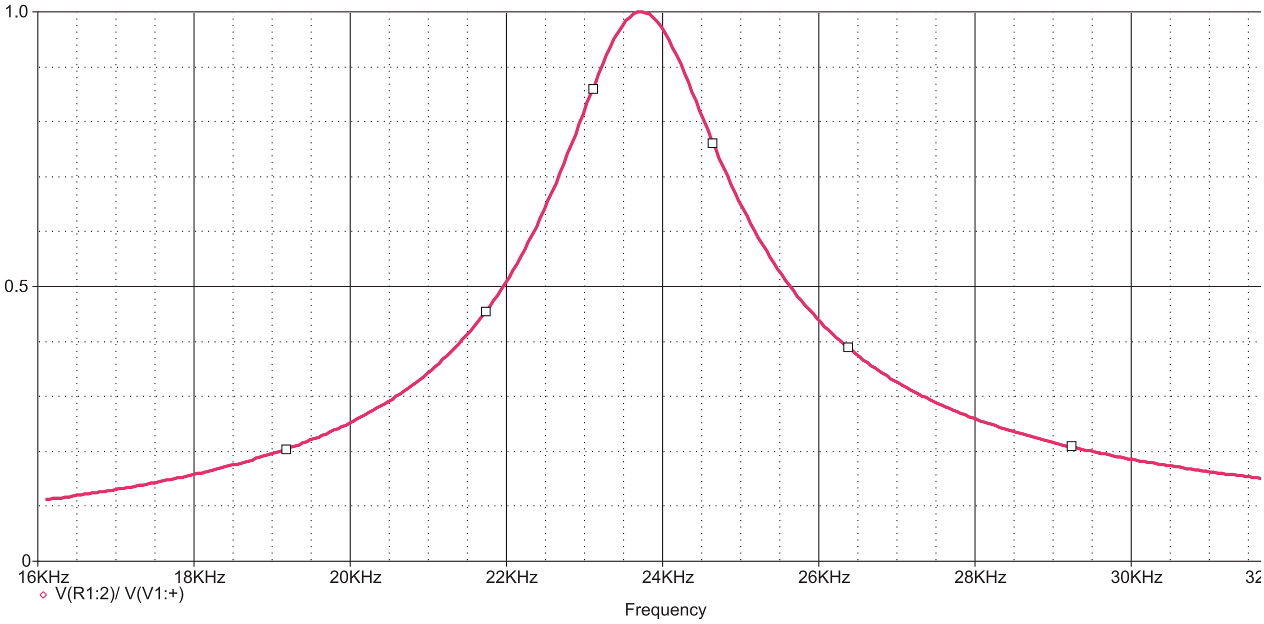
Mit dem Wert –1 berechnen wir:

$$\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{R\omega C}\right) = -1\,;\quad f_g = 24{,}81\ \mathrm{kHz}$$

Die höhere Frequenz ist die **obere Grenzfrequenz** f_{go} = 24,81 kHz und die niedrigere ist die **untere Grenzfrequenz** f_{gu} = 22,69 kHz. Die Differenz dieser beiden Grenzfrequenzen wird als **Bandbreite** B bezeichnet:

B = 2,12 kHz

Die Bandmittenfrequenz ist keineswegs das arithmetische Mittel der beiden Grenzfrequenzen. Dies ist schon deswegen nicht zu erwarten, weil die Gleichungen, mit denen die Zusammenhänge beschrieben werden, keine linearen, sondern vielmehr quadratische Gleichungen sind.



Lösung 6.31

1) Wir vergleichen jede der beiden T-Schaltungen mit dem Bild 2.14 und setzen entsprechend dem Ergebnis des Beispiels 2.14 sowohl für die obere als auch für die untere T-Schaltung die Z-Matrix an:

$$[\underline{Z}_o] = \begin{bmatrix} \frac{R}{2} - j\frac{1}{\omega C} & \frac{R}{2} \\ \frac{R}{2} & \frac{R}{2} - j\frac{1}{\omega C} \end{bmatrix}$$

$$[\underline{Z}_u] = \begin{bmatrix} R - j\frac{1}{2\omega C} & -j\frac{1}{2\omega C} \\ -j\frac{1}{2\omega C} & R - j\frac{1}{2\omega C} \end{bmatrix}$$

Die beiden T-Schaltungen sind in Parallel-Parallel-Schaltung miteinander verbunden (s. Bild 2.18). Wir bilden deshalb von jeder T-Schaltung die $\underline{Y}$-Matrix durch Inversion der $\underline{Z}$-Matrix und addieren diese $\underline{Y}$-Matrizen der T-Schaltungen zur $\underline{Y}$-Matrix des Doppel-T-Filters:

$$[\underline{Y}] = [\underline{Y}_o] + [\underline{Y}_u] = [\underline{Z}_o]^{-1} + [\underline{Z}_u]^{-1}$$

Schließlich entnehmen wir der Tab. 6.2 die Gleichung für den Spannungs-Übertragungsfaktor für das unbelastete Filter ($G_L = 0$):

$$\underline{T}_u = \frac{-\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{22}}$$

Es wäre wenig sinnvoll, die beschriebenen Rechenoperationen „von Hand“ durchzuführen Das MATLAB-Programm besteht aus nur wenigen Zeilen:

```
% Kapitel 6, Aufgabe 31
syms dwc C R w Tu Y Zo Zu;
clc
disp('Doppel-T-Filter');
disp(' ');
dwc=j/(2*w*C);
Zo=[R-dwc -dwc; -dwc R-dwc];
Zu=[R/2-j/(w*C) R/2; R/2 R/2-j/(w*C)];
Y=inv(Zo) + inv(Zu);
Tu=-Y(2,1)/Y(2,2);
Tu=simplify(Tu);
disp('Tu = '); disp(Tu);
```

Das Ergebnis des MATLAB-Programms erweitern wir mit der imaginären Einheit j und erhalten:

$$\underline{T}_u = \frac{1-(R\omega C)^2}{1-(R\omega C)^2 + \mathrm{j}\,4R\omega C}$$

Wir formen dies so um, dass der Realteil des Nenners den Wert 1 erhält:

$$\underline{T}_u = \frac{1}{1+\mathrm{j}\,\dfrac{4R\omega C}{1-(R\omega C)^2}}$$

Mit der Bezugs-Kreisfrequenz $\omega = 1/RC$ und der normierten Frequenz $\Omega = \omega/\omega_{\text{bez}} = \omega\,CR$ lautet der Spannungs-Übertragungsfaktor:

$$\underline{T}_u = \frac{1}{1+\mathrm{j}\,\dfrac{4\,\Omega}{1-\Omega^2}}$$

2) Für $\Omega \to 0$ ist $T_u = 1$; für $\Omega = 1$ ist $T_u = 0$ und für $\Omega \to \infty$ ist $T_u = 1$. Um die letzte Aussage zu erhalten, ersetzen wir die Gleichung, welche den Spannungs-Übertragungsfaktor beschreibt, für $\Omega \gg 1$ durch eine Näherung:

$$\underline{T}_u \approx \frac{1}{1+\mathrm{j}\,\dfrac{4}{\Omega}}$$

Für $\Omega \to \infty$ geht der Imaginärteil des Nenners gegen null und es ist $T_u = 1$.

3) Bei einer Grenzfrequenz hat der Imaginärteil im Nenner der Gleichung für $\underline{T}_u$ entweder den Wert +1 oder den Wert −1. Die Gleichung $4\,\Omega/(1-\Omega^2) = 1$ ergibt die untere normierte Grenzfrequenz $\Omega_{\text{gu}} = 0{,}236$ und die Gleichung $4\,\Omega/(1-\Omega^2) = -1$ ergibt die obere normierte Grenzfrequenz $\Omega_{\text{go}} = 4{,}24$.