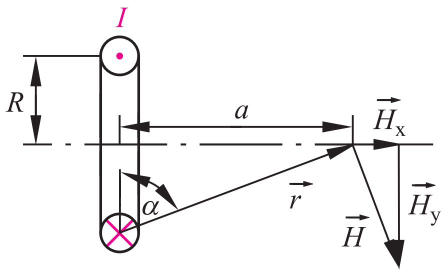
Aufgabe 3.20

Eine Leiterschleife mit dem Durchmesser $D = 2R$ wird von einem Gleichstrom I durchflossen. Berechnen Sie allgemein (d. h. mit Formelzeichen) die Feldstärke H auf der Achse der Leiterschleife, die im Abstand a von der Ebene der Leiterschleife entsteht. Die Leiter der Stromzuführung werden eng beieinander geführt, so dass sie zum Feld nichts beitragen.



Aufgabe 3.21

Eine einlagig gewickelte Zylinderspule mit 600 Windungen aus Kupferlackdraht (Durchmesser d = 0,5 mm) hat den mittleren Durchmesser D = 4 cm. Näherungsweise soll angenommen werden, dass die wendelförmig gewickelte Spule aus N nebeneinander liegenden Leiterschleifen besteht, die vom Strom I = 0,2 A durchflossen werden. Berechnen Sie die magnetische Feldstärke im Punkt P_1 und im Punkt P_2 (Bild 3.29).
Wie groß ist im Punkt P_1 die Abweichung von der in der Gl. (3.53) genannten Näherung?

Aufgabe 3.22

Mit einer HELMHOLTZ-Spule kann ein nahezu homogenes Feld erzeugt werden; dabei handelt es sich um zwei Spulen mit dem Durchmesser $D = 2R$, die auf einer Achse im Abstand $a = R$ angeordnet sind.
Hat jede Spule die Windungszahl $N = 1$, so handelt es sich um zwei Leiterschleifen. Das Magnetfeld einer Leiterschleife wurde in der Aufgabe 3.20 berechnet. Verwenden Sie das Ergebnis dieser Aufgabe und veranschaulichen Sie die magnetische Feldstärke H auf der Achse zwischen den Spulen. Um wieviel Prozent weicht der kleinste Wert vom größten ab?

Lösung 3.20

Die Gl. (3.55) beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Strom und der Feldstärke:

$$\vec{H} = \frac{I}{4\,\pi} \cdot \int_l \frac{\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Die Integration muss über die Länge $l = \pi D$ der Leiterschleife durchgeführt werden. Der Winkel zwischen jedem infinitesimal kleinen Wegelement $\mathrm{d}\vec{l}$ und dem Verbindungsvektor $\vec{r}$ ist für jedes Wegelement 90° und es gilt:

$$\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r} = \mathrm{d}l \cdot r \cdot \sin 90° = \mathrm{d}l \cdot r$$

Da die Länge des Verbindungsvektors für jedes Wegelement die gleiche Länge r hat, lautet die Gleichung für die Feldstärke:

$$\vec{H} = \frac{I}{4\,\pi\,r^2} \cdot \int_l \mathrm{d}\vec{l}$$

Die Integration über sämtliche Wegelemente ergibt den Umfang $2\,\pi R$ der der Leiterschleife. Der Feldstärkevektor $\vec{H}$ hat aber für jedes Wegelement eine andere Richtung.
Wir zerlegen den Feldstärkevektor in eine x-Komponente und eine y-Komponente. Die y-Komponenten heben sich für sämtliche Wegelemente bei der Integration auf; deshalb brauchen wir nur die x-Komponenten zu berücksichtigen:

$$H_x = H \cdot \cos\alpha = \frac{I}{4\,\pi\,r^2} \cdot 2\,\pi\,R \cdot \cos\alpha$$

Mit $\cos\alpha = R/r$ und $r^2 = R^2 + a^2$ ergibt sich:

$$H_x = \frac{I}{2} \cdot \frac{R^2}{\left(R^2 + a^2\right)^{3/2}}$$

Literatur

Frohne, H.: Elektrische und magnetische Felder. Teubner, Stuttgart 1994

Lösung 3.21

Für den Punkt P_1 denken wir uns die Wicklung in zwei gleiche Teile zerlegt und setzen an
- für die erste Windung: $a = 0{,}5\,d$;
- für die zweite Windung: $a = 1{,}5\,d$; usw.

Mit der Gleichung, die wir als Ergebnis der Aufabe 3.20 erhalten haben, berechnen wir für die beiden symmetrischen Wicklungshälften:

$$H_{\mathrm{P1}} = 2\,\frac{IR^2}{2}\cdot\sum_{k=1}^{N/2}\frac{1}{\left(R^2+[(k-0{,}5)d]^2\right)^{3/2}} = 396{,}5\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

Das mit der Gl. (3.53) berechnete Ergebnis 400 A/m weicht weniger als 1 % vom Wert für H_{P1} ab.
Für den Punkt P_2 setzen wir an:

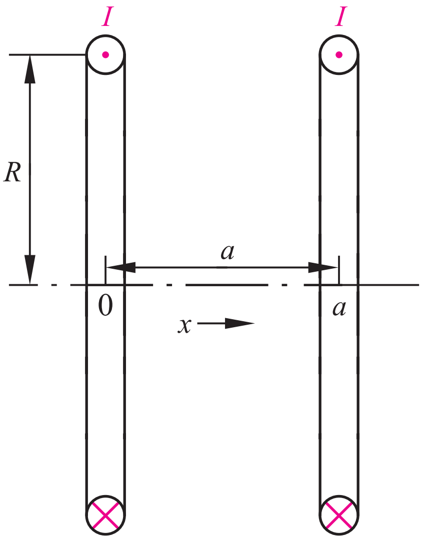
$$H_{\mathrm{P2}} = \frac{IR^2}{2}\cdot\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\left(R^2+[(k-0{,}5)d]^2\right)^{3/2}} = 199{,}6\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

Im Punkt P_2 ist die Feldstärke nur etwa halb so groß wie im Punkt P_1.

```
clc; % Kapitel 3, Aufgabe 21
disp('Aufgabe 3.21');
N=600; d=0.5e-3; l=N*d;
Istr=0.2;
R = 0.02;
HP1=0;
HP2=0;
Nh=N/2;
for k=1:Nh
    HP1=HP1+1/(R^2+((k-0.5)*d)^2)^1.5;
end;
HP1=Istr*R^2*HP1;
disp(['HP1 = ',sprintf(' %2.4e
',HP1),' A/m']);
for k=1:N
    HP2=HP2+1/(R^2+((k-0.5)*d)^2)^1.5;
end;
HP2=Istr*R^2*HP2/2;
disp(['HP2 = ',sprintf(' %2.4e
',HP2),' A/m']);
```

Lösung 3.22

Die beiden Leiterschleifen mit dem Radius R sind im Abstand $a = R$ auf derselben Achse angeordnet.



Entsprechend dem Ergebnis der Aufgabe 3.20 setzen wir an:

$$H_{\mathrm{x}} = \frac{I}{2}\cdot\left[\frac{R^2}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}+\frac{R^2}{\left(R^2+(a-x)^2\right)^{3/2}}\right]$$

Wir erweitern mit R^3 und erhalten mit $D = 2\,R$:

$$H_{\mathrm{x}} = \frac{I}{D}\cdot\left[\frac{R^3}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}+\frac{R^3}{\left(R^2+(a-x)^2\right)^{3/2}}\right]$$

Die Berechnung der Funktion $y = H/(I/D) = f(x)$ nehmen wir mit einem MATLAB-Programm vor.

```
% Helmholtz-Spulen
figure; axis equal;
plot([0 1], [0 0]); hold on;
plot([0 0], [0 2]);
R = 1;
a=0;
xa=0;
ya=R^3/((R^2)^1.5)+R^3/
```

```
((R^2+R^2)^1.5);
for k=1:100;
    a=k*R/100;
    xn=a;
    yn=R^3/((R^2+a^2)^1.5)+R^3/
((R^2+(R-a)^2)^1.5);
    plot([xa xn],[ya yn]);
    xa=xn; ya=yn;
end;
```

Die magnetische Feldstärke auf der Achse ist nahezu konstant. Der maximale Wert 1,431 weicht vom minimalen Wert 1,354 um 5,38 % ab.
Ob zwischen den beiden Leiterschleifen ein homogenes Feld vorliegt, wie dies in manchen Fachbüchern behauptet wird, lässt sich mit unserem Vorgehen nicht nachprüfen.